NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JAUFROID

Concours d'admission à l'École normale supérieure, composition de mathématiques (année 1859)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 376-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__376_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
Composition de mathématiques (année 1859);

PAR M. JAUFROID,
Professeur de mathematiques au college de Toulon.

Énoncé. 1°. On donne dans un plan un nombre quelconque de points : trouver, parmi toutes les droites parallèles à une direction donnée, et situées dans ce plan, celle dont la somme des carrés des distances aux points donnés est un minimum.

2°. La direction de la droite venant à varier, et les points donnés restant les mêmes, prouver que la ligne qui remplit la condition de minimum énoncée plus haut passe par un point fixe.

3°. Combien, par un point donné du plan, peut-on faire passer de lignes telles, que la somme des carrés de leurs distances aux points donnés soit égale à un carré donné.

4°. Il peut arriver que les lignes qui satisfont à la question précédente soient imaginaires : cela a lieu lorsque le point donné est dans l'intérieur d'une certaine courbe dont on demande l'équation.

5°. On peut toujours, quel que soit le nombre des points donnés, et de quelque manière qu'ils soient placés, les remplacer par trois autres, tels, que la somme des carrés de leurs distances à une droite quelconque du plan soit proportionnelle à la somme des carrés des distances des points donnés à la même droite, ou, en d'autres termes, tels, que le rapport des deux sommes de carrés soit le même pour toutes les droites du plan.

6°. Les trois points définis dans la question précédente sont indéterminés ; trouver la courbe sur laquelle ils sont situés.

7°. Le triangle qui a ces trois points pour sommets, a une surface constante.

Notation. (x', y'), (x'', y''),..., points donnés.

$$S(x) = x' + x'' + \ldots,$$
$$S(y) = y' + y'' + \ldots,$$
$$S(xy) = x'y' + x''y'' + \ldots$$

Les formules de transformation des coordonnées servent à prouver facilement qu'on peut prendre pour origine un point tel, et des axes rectangulaires dirigés de telle manière, que l'on ait

$$S(x) = 0, \quad S(y) = 0, \quad S(xy) = 0.$$

1°. Soit m le nombre des points donnés ; l'équation du problème est

$$\frac{S(y - ax - b)^2}{1 + a^2} = A^2,$$

ou

$$(1) \qquad S(y^2) + a^2 S(x^2) + mb^2 = (1 + a^2) A^2.$$

La condition de réalité de b donne pour le minimum de A^2, que je représente par A'^2,

$$A'^2 = \frac{S(y^2) + a^2 S(x^2)}{1 + a^2};$$

on a alors $b = 0$, c'est-à-dire que la droite passe par l'origine, et cela quel que soit a.

2°. Le centre des moyennes distances est donc le point fixe par lequel passe constamment la droite correspondant au minimum, lorsque a varie.

3°. Soient (α, β) un point donné; $y - \beta = a(x - \alpha)$ une droite passant par ce point, l'ordonnée à l'origine est $\beta - a\alpha$; portant cette valeur à la place de b dans l'équation (1), et développant, on obtient

$$[S(x^2) + m\alpha^2 - A^2] a^2 - 2m\alpha\beta a + S(y^2) + m\beta^2 - A^2 = 0$$

Les valeurs de a qu'on en tire peuvent se mettre sous la forme

$$a = \frac{m\alpha\beta \pm m\sqrt{\frac{A^2 - S(x^2)}{m}\beta^2 + \frac{A^2 - S(y^2)}{m}\alpha^2 - \frac{A^2 - S(x^2)}{m} \times \frac{A^2 - S(y^2)}{m}}}{S(x^2) + m\alpha^2 - A^2}$$

On peut donc, en général, par un point donné, faire passer deux droites répondant à un carré donné A^2.

4°. Si la quantité sous le radical est négative, a est imaginaire; le point donné est alors dans l'intérieur de la conique

$$\frac{A^2 - S(x^2)}{m} Y^2 + \frac{A^2 - S(y^2)}{m} X^2 - \frac{A^2 - S(x^2)}{m} \times \frac{A^2 - S(y^2)}{m} = 0.$$

Cette conique est une ellipse si l'on a à la fois

$$A^2 > S(x^2), \quad A^2 > (y^2).$$

C'est une hyperbole si A^2 est compris entre $S(x^2)$ et $S(y^2)$: on ne peut pas avoir A^2 égal ou plus petit que la plus petite des quantités $S(x^2)$ et $S(y^2)$, car alors a est imaginaire, quel que soit le point donné.

Si A^2 est égal à la plus grande de ces valeurs, a est toujours réel, quel que soit le point donné.

En faisant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, la droite considérée passe par l'origine, et la condition de réalité de a donne alors pour le maximum minimorum et le minimum minimorum les quantités $S(x^2)$ et $S(y^2)$, les axes sont alors les droites répondant à ces valeurs.

5°. Soient (p, q), (p', q'), (p'', q'') trois points. La cinquième question conduit à l'équation

$$\frac{S(y^2) + a^2 S(x^2) + m b^2}{S(y^2) + a^2 S(p^2) + 3b^2 - 2a S(pq) - 2b S(q) + 2ab S(p)} = R;$$

cette équation sera satisfaite, quels que soient a et b, en posant

$$R = \frac{m}{3}.$$

$$(2) \qquad p^2 + p'^2 + p''^2 = \frac{3}{m} S(x^2) = 2g^2,$$

$$(3) \qquad q^2 + q'^2 + q''^2 = \frac{3}{m} S(y^2) = 2h^2,$$

$$(4) \qquad pq + p'q' + p''q'' = 0,$$

$$(5) \qquad p + p' + p'' = 0,$$

$$(6) \qquad q + q' + q'' = 0.$$

Les couples (p, q), (p', q'), (p'', q'') entrant de la même manière dans ces équations, l'élimination conduirait à une équation en p, q, identique à celle qu'on trouverait en p', q' ou en p'', q''. L'équation en p, q sera donc le lieu des trois points considérés.

Avant de chercher ce lieu, nous allons démontrer que le triangle qui a ses trois points pour sommets a une surface constante.

Soit T cette surface ; on a, après toutes réductions,

$$2T = qp - pq' + q'p'' - p'q'' + pq'' - qp'' ;$$

mais les équations (5) et (6), multipliées respectivement par q' et p', puis par q'' et p'', et retranchées, donnent

$$qp' - pq' = q'p'' - p'q'' = pq'' - qp'',$$

on a donc

$$qp' - pq' = q'p'' - p'q'' = pq'' - qp'' = \frac{2}{3}T ;$$

élevant au carré et ajoutant, il vient

$$(qp' - pq')^2 + (q'p'' - p'q'')^2 + (pq'' - qp'') = \frac{4}{3}T^2.$$

Développant et se servant des équations (2), (3) et (4), on obtient

$$T^2 = 3g^2h^2.$$

6°. Considérons maintenant le système

$$(7) \qquad qp' - pq' = \frac{2}{3}T,$$

$$(8) \qquad p^2 + pp' + p'^2 = g^2,$$

$$(9) \qquad q^2 + qq' + p'^2 = h.$$

Les équations (8) et (9) ont été obtenues en portant dans les équations (2) et (3) les valeurs de p'' et q'' fournies par les équations (5) et (6). Il s'agit d'éliminer p' et q' entre ces trois équations.

Portant dans l'équation (8) la valeur de p' fournie par l'équation (7), simplifiant à l'aide de l'équation (9), on obtient une équation du premier degré en q' ; résolvant et portant cette valeur de q' dans l'équation (9), on obtient, en remplaçant T^2 par sa valeur,

$$(3g^2q^2 + 3p^2h^2 - 4g^2h^2)^2 = 0\,;$$

ce qui donne, pour le lieu des trois points considérés, l'ellipse

$$\frac{4g^2}{3}Y^2 + \frac{4h^2}{3}X^2 - \frac{4g^2}{3} + \frac{4h^2}{3} = 0.$$