Enveloppes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 366-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__366_1>

ENVELOPPES.

SALMON, *Higher curves*, p. 94.

1. a, b, c,... étant des fonctions linéaires des coordonnées x, y, soit donnée la relation

$$T = a t^n + n b t^{n-1} + \frac{n . n - 1}{2} c t^{n-2} + \ldots = 0,$$

où t est un paramètre variable; de sorte que T représente une droite variable dans un plan.

Soit $U = 0$ l'enveloppe de cette droite.

Il est évident que U est de la classe n; car, à une seule valeur de x, y et t, correspondent n droites tangentes à la courbe U; l'équation $U = 0$ s'obtient par l'élimination de t entre

$$T = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dt} = 0,$$

ou bien entre

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad nT - t\frac{dT}{dt} = 0;$$

dans cette dernière équation, le terme en t^n disparaît;

d'après le théorème de Cayley (t. XII, p. 396), les coefficients des deux équations montent dans chaque terme au degré $n-1$, et comme ces coefficients sont linéaires, il s'ensuit que le degré de U est $2(n-1)$. La classe devrait être dans le cas général $2(n-1)(2n-3)$; mais elle est de la classe n : donc la relation $T=0$ ne peut donner les courbes générales de la classe n; il y a donc des points multiples.

Points de rebroussement. $T=0,\ \dfrac{dT}{dt}=0,\ \dfrac{d^2T}{dt^2}=0,$

$$T = at^n + nbt^{n-1} + \frac{n(n-1)c}{1.2}t^{n-2} + \ldots,$$

$$\frac{dT}{dt} = n\left[at^{n-1} + (n-1)bt^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)c}{1.2}t^{n-3} + \ldots\right],$$

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2T}{dt^2} = n(n-1)\\ &\times\left[at^{n-2} + (n-2)bt^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)c}{1.2}t^{n-4} + \ldots\right] = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &nT - \frac{tdT}{dt}\\ &= n\left[bt^{n-1} + (n-1)ct^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)dt^{n-3}}{1.2} + \ldots\right],\end{aligned}\right.$$

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &n(n-1)\frac{dT}{dt} - \frac{d^2T}{dt^2} = n(n-1)\\ &\times\left[bt^{n-2} + (n-2)ct^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}dt^{n-4} + \ldots\right] = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} &(n-1)(b) - t(c) = n(n-1)\\ &\times\left[ct^{n-2} + (n-2)dt^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)et^{n-4}}{1.2} + \ldots\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

Éliminant x et y entre les équations (a), (c), (d), on obtient une équation en t du degré $3(n-2)$; on a donc autant de points de rebroussement.

Points multiples. Dans la relation (1), on connaît donc pour le cas actuel : n classe de U ; m degré et $\varkappa$ nombre de points de rebroussement. Substituant ces valeurs, on trouve pour le nombre de points multiples δ,

$$\delta = 2(n-2)(n-3).$$

Points d'inflexion. $T = 0$ et $\frac{dT}{dt} = 0$ représentent deux droites qui doivent coïncider aux points d'inflexion ; cette identification n'est pas possible dans le cas général.

Tangente-double. L'équation $T = 0$ peut se mettre sous la forme

$$x F_1(t) + y F_2(t) + F_3(t) = 0;$$

pour qu'il y ait une tangente-double, il faut que pour deux valeurs différentes t_1, t_2 les deux droites coïncident.

Lorsque $n = 3$, on ne trouve qu'une seule double-tangente.

Observation. Lorsque a, b, c sont des fonctions de degré r, l'équation en U est de degré $2r(n-1)$.

Ainsi, si $n = 2$, $r = 1$, $U = 0$ représente une conique.

2. $A\mu^n + B\mu^p + C = 0$; A, B, C fonction d'un paramètre variable.

Équation de l'enveloppe :

$$n^n A^p C^{n-p} \pm p^n (n-p)^{n-p} B^n = 0.$$

Le signe $+$ pour n impair et -1 pour n pair.

3. $A \cos^m \theta + B \sin^m \theta = C$; θ paramètre variable.

Équation de l'enveloppe :

$$A^{\frac{2}{2-m}} + B^{\frac{2}{2-m}} = C^{\frac{2}{2-m}}.$$

Ainsi, toute tangente à une courbe donnée par l'équation $x^n + y^n = a^n$, peut être exprimée par l'équation

$$x \cos\theta^{\frac{2(n-1)}{n}} + y^{\frac{2(n-1)}{n}} = a.$$

4. $(A\alpha)^m + (B\beta)^m + C^m = 0$, α, β paramètres variables entre lesquels on donne la relation $(a\alpha)^n + (b\beta)^n + c^n = 0$; A, B, C fonctions de x, y; a, b, c, m, n, constantes données.

Soit

$$\frac{mn}{m-n} = p.$$

On obtient pour équation de l'enveloppe :

$$\left(\frac{a}{A}\right)^p + \left(\frac{b}{B}\right)^p + \left(\frac{c}{C}\right)^p = 0.$$

5. *Polaire réciproque.* $f(x, y, z) = 0$, équation homogène de la courbe;

$$x_1,\ y_1,\ z_1,$$

coordonnées d'un point de cette courbe;

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

équation de la directrice (cercle imaginaire);

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0,$$

équation de la tangente à la polaire réciproque.

L'enveloppe de cette droite donne l'équation de la polaire réciproque; les paramètres variables x_1, y_1, z_1 sont liés par la relation $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, il suffit d'éliminer z_1 : on obtient une équation homogène en x_1, y_1. Ordonnant par rapport à x_1, y_1, et écrivant que l'équation a deux racines égales, on obtient l'équation de la polaire réciproque, car x, y, z sont considérées comme coordonnées du point de contact de la droite avec la polaire réciproque.

Application.

$$a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + a'' z^2 + 2 b yz + 2 b' zx + 2 b'' xy = 0.$$

Représentons par Δ le déterminant : on a

$$\Delta = a b^2 + a' b'^2 + a'' b''^2 - a a' a'' - 2 b b' b'' = \begin{vmatrix} a, & b', & b'' \\ b'', & b, & a' \\ b', & a'', & b \end{vmatrix}$$

l'équation de la polaire réciproque relativement au cercle $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ est

$$x^2 \Delta_a + y^2 \Delta_{a'} + z^2 \Delta_{a''} + yz \Delta_{b''} + zx \Delta_{b'} + yx \Delta_{b''} = 0,$$

où

$$\Delta_a = \frac{d.\Delta}{da}, \quad \Delta_b = \frac{d.\Delta}{db}, \ldots$$

L'équation de la polaire réciproque se déduit donc de l'équation donnée, en remplaçant le coefficient de chaque terme par la dérivée partielle analogue du déterminant.

Il y a deux moyens de trouver l'équation d'une polaire réciproque : 1° comme enveloppe d'une tangente ; 2° comme lieu du pôle d'une tangente. M. Salmon préfère la première méthode, et en a montré l'application aux courbes du quatrième ordre. (*High. curves*, page 101 ; 1852.) M. Cayley a, le premier, donné la polaire réciproque des courbes du troisième ordre. (*Camb. and Dub. mat. Journ.* ; t. I, p. 97 ; 1846.)

Note. Sauf une plus simple démonstration, le procédé pour la limite des racines décrit page 310 a déjà été donné par M. Desboves (t. XIII, p. 60 ; 1854).