DEWULF

Mémoire sur les polaires inclinées

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 322-333

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__322_1>

MÉMOIRE SUR LES POLAIRES INCLINÉES;

PAR M. DEWULF.

I. Désignons, avec M. Steiner, une courbe plane donnée par une équation de degré n entre x et y par C^n, et un faisceau de courbes passant par n^2 points par F^n.

Si d'un point P pris dans le plan d'une courbe C^n nous menons toutes les droites qui coupent la courbe sous un angle donné, tous les points où le faisceau de droites coupe la courbe sous l'angle donné sont sur une courbe C_1^n que je nomme *première polaire inclinée* du point P relativement à la courbe C^n. Si nous prenons la première polaire inclinée du point P relativement à C_1^n, nous trouverons une courbe C_2^n que je nommerai *deuxième polaire inclinée* de P relativement à C^n. Et ainsi de suite. La $p^{\text{ième}}$ polaire inclinée de P relativement à C sera désigné par C_p^n.

II. Soient

$$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe C^n rapportée à des axes rectangulaires, et x', y' les coordonnées d'un point de cette courbe.

L'équation générale des droites qui passent par ce

(*) Réimpression *memoriæ lapsu* (t. XIII, p. 415).

point est

$$(1) \qquad y - y' = m(x - x'),$$

et l'équation de la tangente en ce point à C^n est

$$(2) \qquad (y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

Pour que ces droites (1) et (2) forment un angle dont la tangente trigonométrique soit k, il faut que l'on ait

$$\frac{dF}{dx'} + m\frac{dF}{dy'} = k\left(\frac{dF}{dy'} + m\frac{dF}{dx'}\right).$$

De cette équation nous tirons

$$m = -\frac{\dfrac{dF}{dx'} - k\dfrac{dF}{dy'}}{\dfrac{dF}{dy'} + k\dfrac{dF}{dx'}}.$$

Et l'équation générale de la droite qui, passant par un point (x', y') de la courbe C^n, fait avec elle un angle constant dont la tangente est k, est

$$(y - y')\left(\frac{dF}{dy'} + k\frac{dF}{dx'}\right) + (x - x')\left(\frac{dF}{dx'} - k\frac{dF}{dy'}\right) = 0.$$

Nommons (α, β) les coordonnées d'un point fixe P. L'équation de la première polaire inclinée du point P par rapport à C sera

$$(3) \quad (\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

x et y désignant maintenant les coordonnées courantes de la première polaire inclinée C_1^n.

Cette équation est du degré n. *Donc, par un point quelconque* P *du plan d'une courbe* C^n, *on peut mener* n² *droites qui coupent cette courbe sous un angle constant, et les pieds de ces* n² *droites sont sur une courbe de degré* n.

III. Si $k = 0$, le degré de l'équation (3) s'abaisse d'une unité, et le théorème I se transforme en ce théorème bien connu :

Par tout point du plan d'une courbe C^n *on peut mener* n (n — 1) *tangentes à cette courbe, et les points de contact se trouvent sur une courbe de degré* n — 1.

Si $k = \infty$, le degré de l'équation ne s'abaisse pas, et le théorème I nous donne, comme cas particulier, ce théorème connu :

Par tout point du plan d'une courbe C^n, *on peut mener* n² *normales, et les pieds de ces normales se trouvent sur une courbe de degré* n.

Puisque toute normale à une courbe C^n est tangente à la développée de cette courbe, nous pouvons conclure du théorème précédent que la développée d'une courbe C^n est de la classe n^2

IV. Le faisceau de n^2 droites qui coupe C^n sous un angle constant coupe cette courbe en n^3 points, et comme n^2 de ces points se trouvent sur une courbe de degré n, les $n^3 - n^2$ autres points d'intersection se trouvent sur une courbe de degré $n^2 - n$.

V. Discutons l'équation générale de la courbe C_1^n. Pour cela, mettons-la sous la forme

$$\frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0.$$

Nous pouvons satisfaire à cette équation en posant

$$1^\circ.\ \frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

2°. $\dfrac{dF}{dx} = 0$ et $y - \beta - k(x - \alpha) = 0$.

3°. $\dfrac{dF}{dy} = 0$ et $y - \beta + \dfrac{1}{k}(x - \alpha) = 0$.

4°. $y - \beta - k(x - \alpha) = 0$ et $y - \beta + \dfrac{1}{k}(x - \alpha) = 0$.

1°. En posant

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

l'équation de C_1^n est satisfaite, quelles que soient les valeurs de α et β.

Donc, *toutes les premières polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe* C^n *passent par* $(n - 1)^2$ *points fixes.*

2°. En posant

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad y - \beta - k(x - \alpha) = 0,$$

l'équation de C_1^n est satisfaite, quelle que soit la valeur de $\dfrac{dF}{dy}$.

Donc les premières polaires inclinées d'un point donné P par rapport à toutes les courbes dont l'équation a même dérivée par rapport à x, ont $(n - 1)$ points fixes communs, tous en ligne droite avec le point P. La direction de cette droite varie avec k.

3°. En posant

$$\frac{dF}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad y - \beta + \frac{1}{k}(x - \alpha) = 0,$$

l'équation de C_1^n est satisfaite, quelle que soit la valeur de $\dfrac{dF}{dy}$. Nous arrivons à un théorème analogue au précédent.

De ces deux théorèmes résulte celui-ci :

Les polaires inclinées d'un point P *par rapport à toutes les courbes représentées par l'équation*

$$F(x, y) + C = 0,$$

C *étant une constante arbitraire, se coupent en* 2 (n — 1) *points fixes distribués* n — 1 *à* n — 1 *sur deux droites rectangulaires qui se coupent en* P, *mais dont la direction varie avec* k.

4°. En posant

$$y - \beta - k(x - \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad y - \beta + \frac{1}{k}(x - \alpha) = 0,$$

ou

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta,$$

l'équation de la première polaire est satisfaite.

Donc la première polaire d'un point par rapport à une courbe passe par ce point.

VI. Remarquons encore que les termes du degré le plus élevé en xy de l'équation de C_1^n sont indépendants de α, β, k; par conséquent, la direction des asymptotes de C_1^n ne varie pas avec α, β, k, ce qui nous donne ce théorème :

Toutes les premières polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe C^n *passent par* n *points fixes situés à l'infini.*

VII. Si nous remarquons que les $(n-1)^2$ points fixes dont il est question dans le théorème (V, 1°) sont les $(n-1)^2$ pôles par rapport à C^n de la droite située à l'infini, nous pourrons déduire des théorèmes (V, 1°) et (VI) ce théorème très-général :

P_1 *et* P_2 *étant deux points quelconques du plan d'une courbe* C^n, *leurs premières polaires inclinées par rapport* *à* C^n *ont en commun* $n^2 - n + 1$ *points fixes, savoir les* $(n-1)^2$ *pôles de la droite située à l'infini, pôles pris relativement à* C^n *et* n *points situés à l'infini.*

Un cas particulier de ce théorème, celui qui correspond à $k = \infty$, a déjà été énoncé par M. Steiner.

VIII. Posons

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0,$$

et l'équation de C_1^n devient

$$\frac{dF}{dy}(-y + kx) + \frac{dF}{dx}(-x - ky) = 0.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx} + k\left(y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dx}\right) = 0.$$

Nommons première polaire *ordinaire* la première polaire inclinée qui correspond à $k = 0$, et première polaire *normale* celle qui correspond à $k = \infty$.

La première polaire de l'origine est

$$(1) \qquad y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx} = 0.$$

La première polaire normale de l'origine est

$$(2) \qquad y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dy} = 0.$$

La courbe représentée par l'équation

$$y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx} + \lambda\left(y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dy}\right) = 0$$

passe par tous les points d'intersection des courbes (1) et (2); or cette équation est précisément celle d'une première polaire inclinée de l'origine.

Donc : *Toutes les premières polaires inclinées d'un point par rapport à* C^n *passent par les* n (n — 1) *points d'intersection de la première polaire (ordinaire) et de la première polaire normale de ce point par rapport à* C^n.

IX. De l'équation (1) (n° VIII), tirons la valeur de $\frac{x}{y}$, et posons

$$\frac{y}{x} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{a}{b}.$$

De l'équation (2) du même paragraphe nous déduirons

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Donc *la première polaire ordinaire et la première polaire normale se coupent à angle droit à l'origine.*

L'équation (3) nous donne

$$\frac{y}{x} = -\frac{\frac{dF}{dx} - \lambda\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dy} + \lambda\frac{dF}{dx}} = -\frac{a - \lambda b}{b + \lambda a}.$$

Donc *la première polaire inclinée, dont le coefficient est* k *d'un point* P, *y coupe la première polaire du même point sous un angle dont la tangente est* k.

X. Soient

$$F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

les équations de deux courbes de degré n.

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0 \tag{1}$$

sera l'équation générale des courbes de degré n qui passent par les n^2 points déterminés par $F = o$ et $f = o$.

La première polaire inclinée d'un point $\alpha\beta$ par rapport à l'une quelconque des courbes du faisceau (1) sera représentée par l'équation générale

$$(\beta - y)\left[\frac{dF}{dy} + \lambda\frac{df}{dy} - k\left(\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{df}{dx}\right)\right]$$
$$+ (\alpha - x)\left[\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{df}{dx} - k\left(\frac{dF}{dy} + \lambda\frac{df}{dy}\right)\right] = o.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right)$$
$$+ \lambda\Big[(\beta - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha + x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = o.$$

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de λ, si l'on pose

$$(\beta - y)\left(\frac{dF}{dr} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = o$$

et

$$(\beta - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = o.$$

Ces équations représentent précisément les premières polaires inclinées du point (α, β) par rapport aux courbes $F = o$ et $f = o$.

De là ce théorème :

Les premières polaires inclinées d'un point P *par rapport à un faisceau* F^n *forment un faisceau* φ^n *homographique au premier, et les* n^2 *points fixes du faisceau* φ^n *sont donnés par les intersections des premières polaires inclinées du point* P *par rapport à deux quelconques des courbes du faisceau* F^n.

XI. Soit toujours la courbe C^n représentée par

$$F(x, y) = 0$$

et supposons que le point (α, β) dont nous prenons la première polaire inclinée par rapport à C^n, parcoure une droite

$$(1) \qquad y = Ax + B.$$

Nous aurons la relation

$$\beta = A\alpha + B,$$

qui nous permettra d'éliminer β de l'équation de C_1^n qui deviendra ainsi

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\left[A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right]\alpha + B\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) \\ &\qquad - y\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation sera satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si nous posons

$$(3) \qquad A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy} = 0$$

et

$$(4) \qquad (B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Donc, quand un point P parcourt une droite, sa première polaire inclinée par rapport à une courbe C^n tourne autour de $n(n-1)$ points *fixes*, que nous nommons *points polaires inclinés de la droite par rapport à* C^n. A chaque point de la courbe ne correspond qu'une courbe, et réciproquement. Donc les points de la droite à la courbe du faisceau de polaires inclinées se correspondent anharmoniquement.

XII. Voyons quelle est la position des $n(n-1)$ points fixes du faisceau trouvé dans le paragraphe précédent.

L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$\frac{dF}{dy}(A-k)+\frac{dF}{dx}(1+Ak)=0,$$

d'où

$$(a)\qquad \frac{dF}{dx}=-\frac{dF}{dy}\left(\frac{A-k}{1+Ak}\right).$$

L'équation (4) peut se mettre sous la forme

$$(b)\qquad \frac{dF}{dx}[k(B-y)-x]+\frac{dF}{dy}[B-y-kx]=0.$$

De ces deux équations, nous tirons

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{dF}{dy}(A-k)[(B-y)k-x] \\ &+\frac{dF}{dy}(1+Ak)(B-y-kx)=0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation avec l'une des équations précédentes détermine les $n(n-1)$ points.

Or l'équation (c) est satisfaite si nous posons

$$\frac{dF}{dy}=0,$$

ce qui entraîne, vu l'équation (a),

$$\frac{dF}{dx}=0.$$

Ainsi parmi les $n(n-1)$ points dont nous cherchons la position se trouvent les $(n-1)^2$ pôles de la droite située à l'infini pris par rapport à C^n, ce qui était facile à prévoir.

L'équation (c) est encore satisfaite en posant

$$(A-k)[k(B-y)-x]-(1+Ak)(B-y-kx)=0,$$

ou, en réduisant,

$$y = Ax + B,$$

ce qui prouve que parmi les $n(n-1)$ points fixes, il y en a n sur la droite donnée.

Si la droite sur laquelle se meut le point P passe à l'infini, c'est-à-dire si $B = \infty$, l'équation (2) (n° XI) devient

$$\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx} = 0.$$

C'est-à-dire, *que tous les points d'une courbe* C^n *par où l'on peut mener des droites parallèles à une droite donnée et coupant la courbe sous un angle donné sont sur une courbe de degré* $n-1$. Cette courbe ne varie pas avec la direction des droites, mais elle varie avec l'angle sous lequel les droites doivent couper la courbe.

XIII. Soit le faisceau F^m représenté par $F + \lambda f = 0$, et supposons que le point (α, β) parcoure la droite

$$(1) \qquad y = Ax + B.$$

Nous aurons la relation

$$\beta = A\alpha + B$$

qui nous permettra d'éliminer β de l'équation de la polaire inclinée du point par rapport au faisceau F^m. Cette équation deviendra ainsi

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} A\left(\dfrac{dF}{dy} + k\dfrac{dF}{dx}\right) + \left(\dfrac{dF}{dx} - k\dfrac{dF}{dy}\right) \\ + \lambda\left[A\left(\dfrac{df}{dy} + k\dfrac{df}{dx}\right) + \dfrac{df}{dx} - k\dfrac{df}{dy}\right] \end{array}\right\}\alpha \\ + (B-y)\left(\dfrac{dF}{dy} + k\dfrac{dF}{dx}\right) - x\left(\dfrac{dF}{dx} - k\dfrac{dF}{dy}\right) \\ + \lambda\left[(B-y)\left(\dfrac{df}{dy} + k\dfrac{df}{dx}\right) - x\left(\dfrac{df}{dx} - k\dfrac{df}{dy}\right)\right] = 0, \end{array}\right.$$

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si nous posons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &A\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)+\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\\ &+\lambda\left[A\left(\frac{df}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)+\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right]=0,\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(B-y)\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)-x\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)\\ &+\lambda\left[(B-y)\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)-x\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations déterminent pour chaque valeur de λ les $n(n-1)$ points polaires inclinés de la droite.

Quand λ varie de $+\infty$ à $-\infty$, le système des points polaires inclinés décrit un lieu que nous trouverons en éliminant λ entre les équations (3) et (4).

Cette élimination nous donne

$$(5)\qquad (B-y+Ax)\left(\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}\right)=0.$$

Donc *les* $n(n-1)$ *points polaires inclinés d'une droite relativement à une courbe* C^n *d'un faisceau* F^n *décrivent la droite donnée et la courbe*

$$\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}=0,$$

de degré $2(n-1)$ *quand la courbe* C^n *tourne autour des* n^2 *points fixes du faisceau.*

La fin prochainement.