

Questions d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 305-308

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__305_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE)

1. Déterminer le lieu géométrique des milieux des cordes d'une surface du second degré

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0,$$

qui passent par un point donné (x', y', z') .

L'une quelconque de ces cordes a pour équations

$$(2) \quad \frac{x - x'}{z - z'} = m,$$

$$(3) \quad \frac{y - y'}{z - z'} = n.$$

L'équation du plan diamétral qui la divise en deux parties égales est

$$(4) \quad m f'_{(x)} + n f'_{(y)} + f'_{(z)} = 0.$$

Donc, si l'on élimine m et n entre (2), (3) et (4), on aura l'équation du lieu géométrique cherché. L'élimination donne immédiatement

$$(5) \quad (x - x') f'_{(x)} + (y - y') f'_{(y)} + (z - z') f'_{(z)} = 0.$$

On voit que ce lieu est une surface semblable à la surface considérée (1), $f(x, y, z) = 0$, semblablement placée, et qui passe par le point donné (x', y', z') .

Les points communs aux surfaces (1) et (5) appartiennent au plan représenté par l'équation

$$(6) \quad (x - x') f'_{(x)} + (y - y') f'_{(y)} + (z - z') f'_{(z)} - 2f(x, y, z) = 0,$$

qui est, comme on sait, du premier degré.

2. Par un point (x', y', z') de l'hyperboloïde

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on mène deux génératrices rectilignes de la surface, trouver l'équation du plan de ces deux droites.

En posant

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = M, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = N, \quad 1 + \frac{y}{b} = M', \quad 1 - \frac{y}{b} = N'$$

et

$$(3) \quad \frac{x'}{a} + \frac{z'}{c} = m, \quad \frac{x'}{a} - \frac{z'}{c} = n, \quad 1 + \frac{y'}{b} = m', \quad 1 - \frac{y'}{b} = n';$$

l'équation (1) de l'hyperboloïde devient

$$(4) \quad MN = M'N',$$

et l'on a

$$(5) \quad mn = m'n',$$

puisqu'le point (x', y', z') est à la surface.

Les équations de l'une des deux génératrices menées par ce point sont

$$(6) \quad Mn = M'n',$$

$$(7) \quad Nm = N'm'.$$

L'autre génératrice a pour équations

$$(8) \quad Mn = N'm',$$

$$(9) \quad Nm = M'n'.$$

En additionnant (6) et (7), ou (8) et (9), il vient

$$(10) \quad Mn + Nm = M'n' + N'm';$$

cette dernière équation représente évidemment le plan des deux génératrices.

Si l'on remplace dans (10), M, N, M', N' par leurs expressions (2), on a d'abord

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)n + \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)m = \left(1 + \frac{y}{b}\right)n' + \left(1 - \frac{y}{b}\right)m',$$

ou

$$\frac{x}{a}(n+m) + \frac{y}{b}(m'-n') + \frac{z}{c}(n-m) = n' + m'.$$

Mais, d'après les relations (3), on a

$$(n+m) = \frac{2x'}{a}, \quad (m'-n') = \frac{2y'}{b}, \quad (n-m) = -\frac{2z'}{c},$$

$$n' + m' = 2;$$

donc

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1$$

est l'équation demandée.

Remarque. On résoudra la même question pour le paraboloïde $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, en remarquant que, dans ce cas,

$$M = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad N = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, \quad M' = 2z, \quad N' = 1,$$

$$m = \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}, \quad n = \frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}, \quad m' = 2z', \quad n' = 1;$$

l'équation (10) devient alors

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)n + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)m = 2(z+z'),$$

ou

$$\frac{x}{a}(n+m) + \frac{y}{b}(n-m) = 2(z+z').$$

Mais

$$(n + m) = + \frac{2x'}{a}, \quad (n - m) = - \frac{2y'}{b};$$

on a donc

$$\frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = (z + z')$$

pour l'équation du plan des deux génératrices rectilignes
du parabolöide. G.