Section du tore par un plan tangent à cette surface et passant par son centre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 258-261
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__258_1>

SECTION DU TORE

Par un plan tangent à cette surface et passant par son centre;

PAR UN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Solution géométrique.

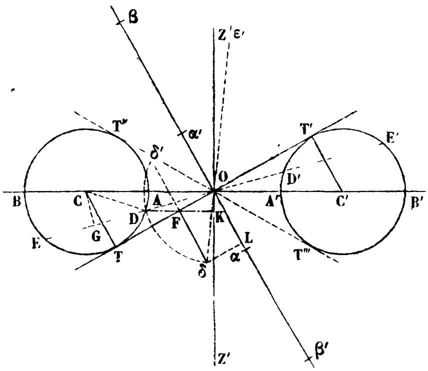
Cette section se compose de deux cercles égaux entre eux, égaux à celui que décrit le centre du cercle générateur, et passant par les points de contact du plan avec la surface.

Ce résultat curieux, indiqué pour la première fois par M. Yvon Villarceau (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 août 1848) (*), est très-facile à établir par l'analyse, qu'on fasse ou non usage des coordonnées polaires indiquées par M. Yvon Villarceau. Nous allons en

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 345.

donner une démonstration géométrique entièrement élémentaire.

Prenons pour plan de la figure le plan méridien perpendiculaire au plan tangent donné. Représentons par les



cercles dont CA et C′A′ sont les rayons, la section de la surface par ce plan méridien. La perpendiculaire ZZ′ à la droite CC′ en son milieu O sera l'axe de la surface. Soit TT′ la trace du plan tangent donné. Rabattons ce plan sur le plan de la figure autour de TT′.

Pour trouver des points de la section cherchée, nous couperons la figure par des plans auxiliaires perpendiculaires à l'axe ZZ′. Soit DK la trace de l'un de ces plans; élevant par le point F où elle rencontre TT′ une perpendiculaire à TT′ et décrivant un cercle de O comme centre avec OD comme rayon, les points de rencontre δ et δ' seront des points de la section rabattue. Le même plan auxiliaire nous en donnerait deux autres points, qu'il nous est inutile de considérer. Le plan auxiliaire passant par le centre nous donnera de même les quatre points α, α', β et β', situés sur la perpendiculaire élevée par O à TT′, et sur les cercles décrits de O comme centre avec OA et OB comme rayons.

Cela posé, je dis que le point δ appartient au cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre, lequel passe d'ailleurs par les points T et T′, puisque l'on a

$$\overline{OT}^2 = OA.OB = O\alpha.O\beta.$$

Abaissons en effet la perpendiculaire CG sur OD; joignons CD et CT. Les triangles semblables ODK et OCG d'une part, OFK et COT d'autre part, donnent

$$\frac{OK}{OD} = \frac{CG}{OC} \quad \text{et} \quad \frac{OF}{OK} = \frac{OC}{CT};$$

d'où l'on déduit en multipliant membre à membre, et remplaçant CT par CD et OD par $O\delta$,

$$\frac{OF}{O\delta} = \frac{CG}{CD},$$

de sorte que les triangles CGD et $OF\delta$ sont semblables. Abaissant δL perpendiculairement sur $\alpha\beta$, on aura donc

$$F\delta \quad \text{ou} \quad OL = \frac{O\delta.DG}{CD} = \frac{OD.DG}{CD}.$$

Maintenant si l'on joint $\beta\delta$ et $\alpha\delta$, on aura

$$\overline{\beta\delta}^2 = \overline{O\beta}^2 + \overline{O\delta}^2 + 2\,O\beta.OL$$

et

$$\overline{\alpha\delta}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{O\delta}^2 - 2\,O\alpha.OL;$$

d'où

$$\overline{\beta\delta}^2 + \overline{O\alpha}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{O\beta}^2 + 2\left[\overline{O\delta}^2 + OL\,(O\delta - O\alpha)\right].$$

Mais

$$O\beta - O\alpha = OB - OA = AB = 2\,CD \quad \text{et} \quad 2\,DG = ED.$$

L'égalité précédente devient donc, en tenant compte de la valeur de OL,

$$\overline{\beta\delta}^2 + \overline{\alpha\delta}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2 OD.OE$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2 OA.OB = (OA+OB)^2 = \overline{AB}^2 = \overline{\alpha\beta}^2.$$

Le triangle $\alpha\delta\beta$ est donc rectangle, et δ est sur le cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. On en déduit immédiatement le théorème annoncé.