NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GASTON DE MONTEBELLO

Sur une limite supérieure du nombre des racines commensurables d'une équation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 256-257

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__256_0>

SUR UNE LIMITE SUPÉRIEURE

Du nombre des racines commensurables d'une équation ;

PAR M. GASTON DE MONTEBELLO,
Élève de l'ecole des Carmes (classe de M. Gerono).

Si après avoir substitué à x dans le premier membre d'une équation à coefficients entiers, $f(x)=0$, n nombres consécutifs $p, p+1, \ldots, p+n-1$, on cherche la plus haute puissance à laquelle n entre comme facteur dans le produit $f(p)f(p+1)\ldots f(p+n-1)$, l'exposant de cette puissance est une limite supérieure du nombre des racines entières de l'équation proposée.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation admette trois racines entières a, b, c. On aura identiquement

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\varphi(x);$$

en substituant dans cette égalité les nombres $p, p+1, \ldots, p+n-1$, on a

$$f(p)=(p-a)(p-b)(p-c)\varphi(p),$$
$$f(p+1)=(p-a+1)(p-b+1)(p-c+1)\varphi(p+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(p+n-1)=(p-a+n-1)(p-b+n-1)(p-c+n-1).$$

Or chacune des suites de nombres entiers consécutifs de $p-a$ à $p-a+n-1$, de $p-b$ à $p-b+n-1$, de $p-c$ à $p-c+n-1$ contient un multiple de n, ce qui montre que le produit $f(p)f(p+1)\ldots f(p+n-1)$ renferme au moins trois fois le facteur n.

Remarquons que tout ce que nous venons de dire sur les racines entières s'applique également aux racines fractionnaires. Car si l'équation admet une racine fractionaire $\frac{\alpha}{\beta}$ (α étant premier avec β), le premier membre est divisible par $(\beta x - \alpha)$, de sorte que le produit

$$f(p)f(p+1)\ldots f(p+n-1)$$

sera divisible par le produit

$$(\beta p - \alpha)[\beta(p+1) - \alpha]\ldots[\beta(p+n-1) - \alpha].$$

Or les n nombres qui entrent comme facteurs dans ce dernier produit forment une progression arithmétique dont la raison est β, et si n est premier avec β, on sait que l'un de ces nombres sera divisible par n. Il suffit donc, pour que l'on puisse appliquer la limite que nous avons indiquée au nombre des racines commensurables de l'équation, de prendre n premier avec tous les dénominateurs des racines fractionnaires irréductibles, et pour cela il suffit de choisir n premier avec le coefficient du premier terme de l'équation qui, comme on sait, est divisible par tous ces dénominateurs.

On conclut des théorèmes précédents que si la substitution de n nombres entiers consécutifs dans $f(x)$ ne donne aucun résultat divisible par n, l'équation

$$f(x) = 0$$

n'a aucune racine entière, et même aucune racine commensurable, si n est premier avec le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue.