Léon Brault

# Concours de l'École polytechnique (1858), composition mathématique

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 18 (1859), p. 220-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__220_0>

## CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1858),

### Composition mathématique;

PAR M. LÉON BRAULT,
Élève de l'institution Barbet

---

$x$, $y$, $z$ désignant des coordonnées rectangulaires et $m$ un paramètre variable, on demande de déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz)$$
$$= 2m^2 - 3m + 1,$$

lorsque le paramètre $m$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

L'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x - y - z)^2 + \frac{2}{m^2}(m^2 y - z)^2 + \frac{2}{m^2}(m^4 - 1)z^2 \\ &= 2m^2 - 3m + 1. \end{aligned} \right.$$

Les racines réelles de l'équation $(m^4 - 1) = 0$ sont $-1$ et $+1$; celles de l'équation $2m^2 - 3m + 1 = 0$ sont $\frac{1}{2}$, et $1$.

Cela posé, en désignant par P, Q, R des polynômes du premier degré, et par $k$ une constante, quand on fait varier $m$ de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation A prend successivement les formes suivantes :

1°. Pour $m = -\infty$,

$$y^2 + z^2 = 1. \quad \text{(Cylindre droit de revolution.)}$$

2°. $m$ variant de $-\infty$ à $-1$,

$$P^2 + Q^2 + R^2 = k^2. \quad \text{(Ellipsoïdes.)}$$

3°. Pour $m = -1$,

$$P^2 + Q^2 = k^2. \quad \text{(Cylindre elliptique.)}$$

4°. $m$ variant de $-1$ à $+\frac{1}{2}$,

$$P^2 + Q^2 - R^2 = k^2. \quad \text{(Hyperboloïdes à une nappe.)}$$

5°. Pour $m = \frac{1}{2}$,

$$P^2 + Q^2 - R^2 = 0. \quad \text{(Cône elliptique.)}$$

6°. $m$ variant de $+\frac{1}{2}$ à $-1$,

$$P^2 + Q^2 - R^2 = -k^2. \quad \text{(Hyperboloïdes à deux nappes.)}$$

7°. Pour $m = 1$,

$$P^2 + Q^2 = 0. \quad \text{(Ligne droite.)}$$

8°. $m$ variant de $+1$ à $+\infty$,

$$P^2 + Q^2 + R^2 = k^2. \quad \text{(Ellipsoïdes.)}$$

9°. Pour $m = +\infty$,

$$y^2 + z^2 = 1. \quad \text{(Cylindre droit de révolution.)}$$

*Remarque.* La forme de l'équation A permet de déterminer facilement, dans chaque cas particulier, un système de plans diamétraux conjugués, quand il en existe; et de déterminer aussi les systèmes de génératrices rectilignes que peuvent admettre les surfaces considérées.

*Note du Rédacteur.* Deux quelconques de ces surfaces (A) se coupent suivant une ligne dont la projection sur le plan des $xy$ est un cercle; l'enveloppe de toutes ces surfaces est une surface du sixième degré.

Lorsque les dix coefficients de l'équation générale sont fonctions d'un même paramètre, variant de $-\infty$ à $+\infty$, on ne peut guère déterminer les diverses surfaces, qu'en ayant recours aux formules de M. Painvin.