MOURGUE

Note sur une question de minimum relative aux polygones réguliers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 158-161

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__158_2>

NOTE SUR UNE QUESTION DE MINIMUM RELATIVE AUX POLYGONES RÉGULIERS;

PAR M. MOURGUE,
Professeur au lycée Napoléon.

THÉORÈME. *Le centre d'un polygone régulier est le point pour lequel la somme des* $m^{\text{ièmes}}$ *puissances de ses distances aux sommets ou aux côtés de ce polygone est la plus petite possible.*

Pour le démontrer, il suffit de considérer dans le plan du polygone un point X différent du centre O, et de faire voir qu'il en existe un second pour lequel la somme des distances de l'ordre m est moindre.

Admettons un instant la proposition suivante :

LEMME. *Si trois nombres positifs* x, y, a, *dont les deux* *premiers sont inégaux, vérifient*

(1) $$x + y \geqq 2a,$$

ils vérifieront aussi l'inégalité

(2) $$x^m + y^m > 2a^m.$$

Corollaire. Si x, y, a, désignent respectivement deux côtés d'un triangle et la médiane qu'ils comprennent, ou bien encore les deux bases d'un trapèze et la parallèle équidistante, la relation (1) sera satisfaite et par suite aussi (2).

Cela posé, figurons-nous la circonférence décrite de O comme centre avec OX pour rayon, et inscrivons-y, à partir de X, un polygone semblable au proposé polygone.

Soit Y le second sommet dans l'ordre de l'inscription. Les distances respectives de X et de Y à deux sommets ou à deux côtés qui se succèdent, dans le polygone proposé, suivant l'ordre précédent, sont égales comme côtés homologues des triangles évidemment égaux, qu'on obtient en joignant le centre aux extrémités de ces droites.

Par conséquent aussi les m^ièmes^ *puissances des distances du point* X, *aux sommets ou aux côtés du polygone donné, sont respectivement égales à celles qui concernent le point* Y..

En second lieu, soit A le milieu de XY et x, y, a les distances des points X, Y, A, à un sommet ou à un côté quelconque du polygone. En vertu du corollaire on aura

$$x^m + y^m > 2 . a^m;$$

d'où, par addition des inégalités analogues,

$$\sum x^m + \sum y^m > 2 \sum a^m.$$

Mais

$$\sum x^m = \sum y^m;$$

donc

$$\sum x^m > \sum a^m,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Pour le cas où $m = 1$ et où l'on considère les distances de X et de A aux côtés du polygone, on a $x + y = a$, et par suite $\sum x = \sum a$, ce qui est conforme à un théorème connu.

Démonstration du lemme. Si

$$x + y \geqq 2a,$$

on aura

$$x^m + y^m > 2a^m.$$

Admettons en effet que

$$x^n + y^n \geqq 2a^n,$$

d'où

$$(x^n + y^n)\frac{x + y}{2} \geqq 2a^{n+1};$$

mais

$$(x^n - y^n)\frac{x - y}{2} > 0,$$

d'où, par addition,

$$x^{n+4} + y^{n+1} > 2a^{n+1}.$$

Or

$$x + y \geqq 2a;$$

donc

$$x^2 + y^2 > 2a^2$$

et, en continuant,

$$x^m + y^m > 2a^m.$$

Remarque. Il en résulte aussi que si $x + y = 2a$, la somme $x^m + y^m$ est minimum pour $x = y = a$.

En terminant cette Note, j'ajouterai un mot sur une autre question de minimum. De même que, dans une recherche de ce genre, en multipliant par $-\frac{1}{a}$ le polynôme $ax^2 + bx + c$, et en laissant de côté le terme indépendant, on le ramène au type connu $x(k - x)$, on peut aussi ramener la fraction $\frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$ au type précédent ou au type $x + \frac{K}{x}$, qui se traduit également dans une propriété du cercle.

En effet, cette fraction diminuée de a donne un résultat de l'une des formes suivantes :

$$\frac{q}{x^2 + px + q}, \qquad \frac{p'x + q}{r^2 + px + q},$$

selon que b égale ou non ap.

La première nous ramène au polynôme du second degré. La seconde, en posant $p'x + q' = p'z$, devient

$$\frac{p'z}{z^2 + mz + n} \text{ ou } \frac{p'}{z + \frac{n}{z} + m};$$

suivant que n sera supérieur à zéro ou non, il y aura ou il n'y aura pas de maximum et de minimum.