Nouvelles annales de mathématiques

H. Lemonnier

Note sur les questions 453 et 458

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 150-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__150_1>

NOTE SUR LES QUESTIONS 453 ET 458;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nantes.

Fx étant une fonction continue dans l'intervalle de x_0 à X, dont la dérivée $F'x$ soit également continue et de plus constamment croissante ou décroissante dans cet intervalle, on sait que si $X - x_0$ se partage en n parties égales $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_2 - x_2 = \ldots = X - x_{n-1} = h$, l'accroissement $FX - Fx_0$ est compris entre les deux sommes

$$h(F'x_0 + F'x_1 + \ldots + F'x_{n-1})$$

et

$$h(F'x_1 + F'x_2 + \ldots + F'x_n).$$

Cela posé :

1. Soit

$$Fx = l(1 + x),$$

d'où

$$F'x = \frac{1}{1+x};$$

faisons croître x de o jusqu'à n en prenant $L = 1$, il s'ensuit

$$l(1+n) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}$$
$$< \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

De là

$$ln > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{l}{n}$$

$$1 + ln > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Donc

$$l(1+n) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + ln.$$

(Quest. 453, p. 68.)

2. Si on fait pour la même fonction $x_0 = n - 1$ et $X = N - 1$, on aura de même

$$lN - ln = l\frac{N}{2} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{N}$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{N-1},$$

d'où, en prenant $N = 2n$,

$$l2 > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}.$$

(Quest. 458, p. 66.)

La différence des deux limites est

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n};$$

en conséquence, si n croît indéfiniment, l'expression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

a pour limite lz.

Qu'on prenne

$$N + np,$$

on aura

$$lp > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np}$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{np-1},$$

et p restant fixe, si n croît indéfiniment, lp est la limite de l'expression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np}.$$

3. Soit

$$Fx = -\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}},$$

d'où

$$F'x = \frac{1}{(x-1)^p};$$

faisons croître x indéfiniment à partir d'une première valeur $x > 1$, et soit $h = 1$. La même considération donne

$$\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}} > \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \ldots$$

$$< \frac{1}{(x-1)^p} + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \ldots$$

de sorte que

$$\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} < \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \ldots;$$

donc

$$\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}} > \frac{1}{(p-1)^{p-1}} + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \ldots.$$

On en conclut, au cas de $p > 1$, la convergence de la série

$$\frac{1}{x^p}+\frac{1}{(x+1)^p}+\frac{1}{(x+2)^p}+\ldots$$

et en particulier de la série

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{2}{4^p}+\ldots.$$

Ajoutons que si cette dernière série est poussée jusqu'au terme $\frac{1}{n^p}$ inclusivement, le reste $R=\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\ldots$ se trouve compris entre $\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}$ et $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$.