DE JONQUIÈRES

Solution de la question 376

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 129-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__129_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 376

(voir t. XVI, p. 179);

PAR M. DE JONQUIÈRES.

Il s'agit de démontrer que *sur une surface du troisième degré il existe, en général, vingt-sept droites.*

Cette question a été traitée, il y a quelques années, par MM. A. Cayley et G. Salmon. Je ne fais guère qu'analyser diverses publications de ces deux savants géomètres.

LEMME I. *Le cône circonscrit à une surface du de-*

gré m est du degré $m(m-1)$; *il a* $m(m-1)(m-2)$ *arêtes de rebroussement, et* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *autres arêtes doubles.*

Pour le démontrer, soit $U=0$ l'équation de la surface exprimée en coordonnées *quadrilittères* x, y, z, t. Soient aussi $(x, y, z, t), (x', y', z', t')$ les coordonnées de deux points a et a'; celles du point qui divise la droite aa' dans le rapport de λ à μ, seront

$$\lambda x+\mu x', \quad \lambda y+\mu y', \quad \lambda z+\mu z', \quad \lambda t+\mu t'.$$

Substituons ces expressions aux coordonnées courantes, dans l'équation de la surface, l'équation résultante sera du $m^{ième}$ degré en $\frac{\mu}{\lambda}$, et ses m racines seront les valeurs des coordonnées des points où la surface est rencontrée par la droite aa'.

Le résultat de cette substitution sera, en vertu du théorème de Taylor appliqué aux fonctions de quatre variables,

$$[U]=\lambda^m U+\lambda^{m-1}\mu\ \Delta U+\frac{\lambda^{m-2}.\mu^2}{1.2}\Delta^2 U+\ldots=0,$$

où l'on représente, pour abréger, par le symbole Δ l'opération

$$x'\frac{d}{dx}+y'\frac{d}{dy}+z'\frac{d}{dz}+t'\frac{d}{dt}\ (*).$$

Actuellement soit $\varphi(U)=0$ l'équation qui exprime la condition nécessaire pour que l'équation $[U]$ en $\frac{\lambda}{\mu}$ ait deux racines égales. Si, dans cette équation, on regarde x, y, z, t comme variables, elle représentera le lieu géométrique de tous les points tels, que la droite qui joint

(*) Sous-entendez dU.

chacun d'eux au point a' touche la surface donnée; en d'autres termes, cette équation de condition

$$\varphi(\mathrm{U}) = 0$$

sera l'équation du cône circonscrit qui a son sommet au point $a'(x', y', z', t')$.

Or on sait, par l'algèbre, que la condition dont il s'agit, relativement à une équation homogène à deux variables λ et μ, n'est autre chose que le résultat de l'élimination entre les deux équations dérivées $\frac{d[\mathrm{U}]}{d\lambda}$ et $\frac{d[\mathrm{U}]}{d\mu}$. On voit donc que cette équation résultante est du degré $m(m-1)$ en x, y, z, t; or c'est l'équation du cône circonscrit. Donc la première partie du lemme est démontrée.

Les arêtes de rebroussement du cône circonscrit sont celles qui rencontrent la surface en trois points consécutifs et infiniment voisins (*). Soient (x, y, z, t) les coordonnées du point de contact d'une telle arête, l'équation $[\mathrm{U}] = 0$ doit, dans ce cas, être divisible par μ^3. Donc le point de contact en question est l'un des points d'intersection des trois surfaces $\mathrm{U} = 0$, $\Delta\mathrm{U} = 0$, $\Delta^2\mathrm{U} = 0$, qui sont, respectivement, des degrés m, $m-1$, $m-2$. Le nombre de ces points singuliers est donc, en général,

$$m(m-1)(m-2),$$

et tel est par conséquent aussi le nombre des arêtes de rebroussement du cône, comme il s'agissait de le démontrer.

(*) Le plan tangent en un point quelconque d'une surface coupe cette surface suivant une courbe qui a un point double au point de contact du plan. En chaque point double d'une courbe, il existe deux tangentes; donc, en chaque point d'une surface, on peut lui mener deux tangentes qui aient avec elle trois points communs infiniment voisins. On conçoit qu'il existe sur la surface certains points tels, que l'une de ces deux tangentes singulières passe par le sommet du cône circonscrit. Cette tangente est alors une arête de rebroussement du cône.

Enfin les arêtes doubles ordinaires du cône circonscrit sont celles qui touchent la surface en deux points distincts. L'équation $[U] = 0$ a, dans ce cas, deux valeurs de μ nulles et deux autres égales entre elles. Donc les coordonnées de l'un quelconque des points de contact de ces tangentes doubles doivent satisfaire aux équations

$$U = 0, \quad \Delta U = 0 \quad \text{et} \quad \psi(U) = 0,$$

$\psi(U) = 0$ étant l'équation qui exprime la condition nécessaire pour que l'équation

$$\frac{1}{1.2}\lambda^{m-2}\Delta^2 U + \frac{1}{1.2.3}\lambda^{m-3}\mu\Delta^3 U + \ldots = 0$$

ait des racines égales. $\psi(U)$ est évidemment du degré $(m-2)(m-3)$ en x, y, z, t. Donc le nombre des points de contact des tangentes doubles est, en général,

$$m(m-1)(m-2)(m-3),$$

et, par conséquent, celui des tangentes doubles, qui est aussi celui des arêtes doubles du cône circonscrit, est égal à $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$; ce qui complète la démonstration du lemme.

Lemme II. *Le nombre* T *des plans doubles tangents au cône circonscrit à une surface du degré* m, *est donné par la formule*

$$T = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - (2D + 3D')(m^2 - m - 6)$$

$$+ 2D(D-1) + 6DD' + \frac{9}{2}D'(D'-1),$$

dans laquelle D *et* D' *représentent, respectivement, les* *nombres de ses arêtes doubles et de ses arêtes de rebroussement.*

Pour le démontrer, je rappelle les formules suivantes, qui sont élémentaires, dans la théorie générale des lignes courbes :

m étant le degré d'une courbe algébrique plane;
n sa classe;
D le nombre de ses points doubles;
D′ celui de ses points de rebroussement;
T celui de ses tangentes doubles;
T′ celui de ses tangentes d'inflexion ou stationnaires;
On a les trois relations fondamentales

$$m(m-1) = n + 2D + 3D',$$
$$n(n-1) = m + 2T + 3T',$$
$$3m(m-2) = 6D + 8D + T,$$

dont la seconde se déduit de la première par la théorie des polaires réciproques. On en conclut l'équation citée dans le lemme, en les combinant entre elles et en éliminant n et T′.

Or ces formules conviennent évidemment aux surfaces coniques aussi bien qu'aux courbes planes. Donc l'équation du lemme est justifiée.

Corollaire. On en conclut que le cône du sixième degré, qui est circonscrit à une surface du troisième ordre, n'a aucune arête double, qu'il est doué de six arêtes de rebroussement et de vingt-sept plans tangents doubles.

THÉORÈME. *Sur toute surface du troisième degré il existe vingt-sept droites.*

Première démonstration. Chaque plan tangent double du cône circonscrit à la surface est aussi un plan tangent double de la surface, et par conséquent il la coupe suivant une droite et une conique (*). Réciproquement, tout plan passant par le sommet du cône et par l'une des droites de la surface (s'il en existe), est un plan tangent double du cône.

Donc le nombre des droites qu'on peut mener sur la surface est aussi celui des plans tangents doubles du cône circonscrit. Et, en vertu du lemme II (corollaire), ce nombre est 27.

Seconde démonstration. Une surface du troisième ordre contient, en général, un certain nombre de lignes droites (**). Tout plan mené par une de ces droites coupe la surface suivant la droite et une conique, c'est-à-dire suivant une courbe du troisième ordre douée de deux

(*) En effet, le plan tangent en un point quelconque d'une surface la coupe suivant une courbe qui a le point de contact pour point double; car toute droite menée par ce point dans le plan tangent y rencontre la surface en deux points infiniment voisins. Si le plan tangent est double, il y a deux points de contact, et, par suite, la courbe d'intersection a deux points doubles. Or, dans le cas actuel, cette courbe est du troisième ordre seulement; donc elle ne peut avoir deux points doubles qu'à la condition de se décomposer en une droite et une conique. Les deux points de rencontre de la droite et de la conique sont les deux points doubles de la courbe du troisième ordre que représente le système de ces deux lignes.

(**) Pour qu'une droite coïncide avec la surface, il faut exprimer qu'elle la rencontre en $3+1=4$ points, ce qu'on fera au moyen de quatre équations de condition, qui la détermineront complétement, parce qu'une droite ne comportant dans ses équations que quatre coefficients indépendants, ne peut être assujettie qu'à quatre conditions. Les ordonnées r des points d'intersection de la droite et de la surface seront les racines d'une équation de la forme

$$Ar^3 + Br^2 + Cr + D = 0,$$

et les quatre équations de condition dont il s'agit seront

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0.$$

Cette démonstration prouve incidemment que la surface du troisième degré est la seule surface *générale* sur laquelle on puisse toujours tracer des lignes droites.

points doubles. Un tel plan est donc un plan tangent double, dont les deux points de contact sont les points d'intersection de la droite et de la conique.

Par une détermination convenable du plan dont il s'agit, la conique elle-même peut se réduire à deux droites, et, dans ce cas, le plan coupe la surface suivant trois lignes droites, c'est-à-dire suivant une ligne du troisième ordre qui a trois points doubles, et par conséquent le plan est alors un *plan tangent triple*, dont les trois points de contact sont les trois sommets du triangle que forment les trois droites.

On démontre (*) que, par chacune des droites de la surface, on peut mener cinq et seulement cinq plans tangents triples. Considérons l'un quelconque M de ces plans. Par chacune des trois droites de la surface qu'il contient, on peut mener quatre autres plans semblables, sans compter celui qui nous occupe. On a ainsi douze nouveaux plans, dont chacun donne lieu à deux nouvelles droites situées sur la surface. On a donc 24 droites qui, ajoutées aux 3 contenues dans le plan M, font un total de 27.

Ce sont les seules qui existent sur la surface. Car, puisque les trois droites contenues dans le plan M forment

---

(*) Ce théorème, dont M. Cayley ne donne pas la démonstration, se prouve aisément comme il suit :

Rapportons la surface à trois axes rectangulaires, en choisissant la droite donnée pour axe des x. Son équation, exprimée en coordonnées ordinaires, devant être satisfaite par les valeurs $y=0$ et $z=0$, ne contiendra aucun des termes où x se trouve isolément à diverses puissances et n'aura pas non plus de terme constant. On aura, par exemple,

$$\begin{aligned}Ay^3 + Bz^3 + Cx^2y + Dx^2z + Ey^2x + Fy^2z + Gz^2x + Hz^2y + Ixyz \\ + Kxy + Lxz + Myz + Oy^2 + Pz^2 + Ry + Sz = 0.\end{aligned}$$

Soit

$$z = \alpha y$$

l'équation d'un plan passant par l'axe des x, et dont la position est fixée par la seule valeur de l'indéterminée α. Ce plan coupera la surface suil'intersection complète de ce plan et de la surface, toute autre droite de cette surface ne peut rencontrer le plan M qu'en un point situé sur l'une des trois droites qu'il contient. Cette droite est donc comprise dans un plan passant par l'une de ces lignes, plan qui est lui-même un de ceux qu'on a déjà considérés, puisque, passant déjà par deux droites de la surface, il ne peut la couper que suivant une troisième droite.

Puisqu'il passe cinq plans tangents triples par chacune des 27 droites, et que d'ailleurs chaque plan triple contient trois droites, il s'ensuit que le nombre des plans tangents triples est 45.

De même que le nombre des tangentes, qu'on peut mener à une courbe plane par un point intérieur, diminue quand cette courbe a des points singuliers, de même le nombre

---

vant une conique dont la projection sur le plan des xy aura pour équation

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{array}{l} y^2(\mathrm{B}\alpha^3+\mathrm{H}\alpha^2+\mathrm{F}\alpha+\mathrm{A})+xy(\mathrm{G}\alpha^2+\mathrm{I}\alpha+\mathrm{E})+x^2(\mathrm{D}\alpha+\mathrm{C}) \\ +y[\alpha(\mathrm{M}\alpha+\mathrm{P})+\mathrm{O}]+x(\mathrm{L}\alpha+\mathrm{K})+(\mathrm{S}\alpha+\mathrm{R})=0. \end{array}\right.$$

Désignons, pour abréger, par

a	le coefficient de	y^2,
$2b$	»	xy,
c	»	x^2,
$2d$	»	y,
$2e$	»	x,
f	»	l'équation.

On sait que la condition pour que l'équation (V) se décompose en deux facteurs linéaires est

$$ae^2+cd^2+fb^2-acf-2bde=0$$

(*voir* par exemple *Salmon's Conics*, 3e édit., p. 66). Substituant les valeurs des coefficients de l'équation (V), on obtient une équation du cinquième degré en α. Donc il existe généralement cinq valeurs de α, et pas davantage, qui satisfont à la question ; en d'autre termes, il existe cinq plans passant par la droite donnée sur la surface qui coupe cette surface suivant un système de deux autres droites. Ce qu'il fallait démontrer.

des droites de la surface du troisième ordre diminue ainsi que celui de ses plans tangents triples, quand la surface est douée de points doubles, parce qu'une droite de la surface qui passe par un de ces points doit être comptée pour deux, et pour quatre si elle joint deux de ces points. Pour ces considérations et d'autres du même genre, je dois me borner à renvoyer le lecteur à un article de M. G. Salmon, inséré dans le IV^{e} vol du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal.*

On sait que, si l'on mène quatre plans quelconques par une génératrice rectiligne d'une surface réglée du second ordre, leur rapport anharmonique est égal à celui des quatre points où ils sont tangents à la surface (*). Les lignes droites de la surface du troisième ordre donnent lieu à un théorème analogue qui est ainsi conçu :

Si l'on mène quatre plans quelconques par une droite située sur une surface du troisième ordre, les quatre segments, que déterminent sur cette droite leurs deux points de tangence respectifs, sont en involution, et ils correspondent anharmoniquement aux quatre plans.

La démonstration de ce théorème est une conséquence du *principe de correspondance anharmonique* de M. Chasles. Car à un plan il correspond à la fois deux points de tangence sur la droite, et réciproquement, à chacun de ces points, indistinctement, il ne correspond qu'un seul plan tangent (à moins que ce point ne soit un point singulier de la surface, ce qui n'a pas lieu en général). Or les points sont en ligne droite, et les plans passent par un même point. Donc, etc.

Chacun des deux points doubles de l'involution dont il s'agit est tel, que le plan tangent à la surface en ce point est le même que le plan tangent au point infiniment

(*) CHASLES, *Mémoire sur les surfaces réglées du second ordre.*

voisin dans la direction de la droite. C'est par conséquent un *point parabolique* de la surface, selon l'expression adoptée par les géomètres depuis M. Charles Dupin.

Note du Rédacteur. Sur la surface donnée par l'équation

$$z^3 = ax^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f$$

ou

$$b^2 - 4ac < 0,$$

on ne peut tracer qu'une seule droite située à l'infini.

M. Steiner donne la démonstration suivante :

Soient trois angles *trièdres;* leurs plans se coupent suivant neuf droites par lesquelles passent une infinité de surfaces du troisième degré (*voir* p. 49) ; ces neuf droites et un point donné déterminent une de ces surfaces ; or, ces neuf droites forment six groupes de trois droites chacune tels, que dans chaque groupe les droites ne se rencontrent pas; par chaque groupe passe donc un hyperboloïde à une nappe ; chaque hyperboloïde rencontre encore la surface du troisième ordre (en trois droites) ; il existe donc vingt-sept droites sur cette surface.