NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

De quelques questions d'analyse indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 122-125

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__122_1>

DE QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

I.

Résoudre en nombres entiers l'équation $x^2 - ny^2 = 1$, *dans laquelle on suppose que* n *représente un nombre entier, positif, non carré.*

I. Cette question, proposée par Fermat « comme un défi à tous les géomètres anglais, » n'a été, en définitive, résolue d'une manière complète et rigoureuse que par Lagrange; il en a donné deux solutions; la seconde (*),

(*) *Algèbre* d'Euler, t. II, *Additions*, et *Théorie des nombres* de Legendre.

fondée sur les propriétés des fractions continues périodiques, se déduit simplement d'une proposition établie dans les *Nouvelles Annales*.

Il a été démontré (t. I, p. 19 et 20) que

La racine carrée d'un nombre rationnel, qui n'est pas un carré, est exprimée par une fraction continue périodique, dont la période est précédée d'un seul quotient incomplet; et qu'en outre, *le dernier quotient incomplet de la partie périodique est double du quotient incomplet qui précède la période.*

On peut donc écrire

$$\sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{\vdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{2\alpha + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}}},$$

ou, parce que $2\alpha + \dfrac{1}{a + \text{etc.}} = \alpha + \sqrt{n}$,

$$(1) \qquad \sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{\vdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{\alpha + \sqrt{n}}}}}}}.$$

Désignons par $\dfrac{Q}{Q'}$ l'une des réduites correspondantes à l'avant-dernier quotient incomplet q de la période, et par $\dfrac{P}{P'}$ la réduite précédente qui se termine au quotient incomplet p; l'équation (1) donnera, comme on sait,

$$\sqrt{n} = \frac{Q(\alpha + \sqrt{n}) + P}{Q'(\alpha + \sqrt{n}) + P'},$$

d'où

$$(Q'\alpha + P' - Q)\sqrt{n} = Q\alpha + P - Q'n.$$

Mais, $\sqrt{n}$ étant supposé incommensurable, cette dernière équation exige qu'on ait :

$$Q'\alpha + P' - Q = 0, \quad \text{et} \quad Q\alpha + P - Q'n = 0.$$

De là

$$\alpha = \frac{Q - P'}{Q'}, \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{Q'n - P}{Q}.$$

Donc,

$$\frac{Q - P'}{Q'} = \frac{Q'n - P}{Q};$$

et, par suite,

$$(2) \qquad Q^2 - nQ'^2 = QP' - PQ'.$$

Lorsque $\frac{Q}{Q'}$ est une réduite de rang pair,

$$QP' - PQ' = +1,$$

et si $\frac{Q}{Q'}$ est une réduite de rang impair,

$$QP' - PQ' = -1;$$

dans le premier cas les nombres entiers Q et Q' satisfont à l'équation

$$x^2 - ny^2 = 1,$$

dans le second ils donnent une solution entière de l'équation

$$ny^2 - x^2 = 1.$$

Or, en nommant h le nombre des quotients incomplets

a, b,..., p, q, 2α, de la période; et h le rang d'une période, la réduite correspondante à l'avant-dernier quotient incomplet de cette période sera évidemment kh : il s'ensuit que, si k est pair, les deux termes d'une réduite correspondante à l'avant-dernier quotient d'une période de rang quelconque, donneront une solution entière de l'équation $x^2 - ny^2 = 1$. Et que, si k est impair, on aura une solution entière de l'équation, en prenant les deux termes d'une réduite correspondante à l'avant-dernier quotient incomplet de toute période de rang pair.

Par conséquent, l'équation $x^2 - ny^2 = 1$ admet, toujours, une infinité de solutions entières. Il reste à faire voir que la règle précédente donne toutes les solutions entières de cette équation. G.

La fin prochainement.