Bulletin de bibliographie, d’histoire et de bibliographie mathématiques. Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 1-95 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__S1_0>

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIBLIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

BIBLIOGRAPHIE.

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles spéciales, par *Eugène Rouché*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur au lycée Charlemagne. In-8 de XIV-286 pages. Paris, Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 4 francs.

D'après M. Lamé, parmi les élèves qui suivent les cours de mathématiques des lycées, un tiers apporte toute l'attention nécessaire pour profiter de ce genre d'études. Ce premier contingent, qui peuple seul les diverses écoles générales, s'y fractionne encore une fois sous le point de vue de l'aptitude mathématique : là le quart des élèves étudie les sciences exactes avec goût. M. Rouché a écrit dix-sept chapitres pour le bon tiers et quatre pour l'excellent quart. Le professeur développera en chaire les dix-sept premiers chapitres et réservera les autres pour l'auditoire choisi de la conférence.

Préférez dans l'enseignement les méthodes générales, disait Laplace aux élèves de l'Ecole Normale, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles. M. Rouché a suivi cet excellent conseil, ce qui ne l'empêche pas à l'occasion d'indiquer des artifices propres à des cas particuliers.

L'idée d'appliquer la géométrie à l'algèbre est assez simple pour être introduite dans les éléments, et en cela l'auteur s'est montré selon nous très-judicieux, et nous avons été d'autant plus satisfait à la lecture de ce chapitre, que nous-même, précisément à propos des maximums, avons l'habitude dans notre enseignement de donner ces notions de l'emploi des coordonnées.

Chaque règle est suivie d'un exemple qui en fixe le sens; nous citerons parmi les problèmes du livre celui des courriers, de la division en moyenne et extrême, de Pappus, du cône circonscrit à la sphère, des pompes, des puits, des lumières, problèmes bien anciens, mais que l'on peut rajeunir par l'exposition.

Il est en algèbre un point délicat sur lequel on a longtemps disputé et sur lequel on disputera peut-être toujours : je veux parler des quantités négatives. Une des théories qui nous ont le plus séduit est celle que M. Duhamel exposait dans ses Leçons à l'Ecole Normale et à la Faculté des Sciences, et qui est en partie reproduite dans les *Algèbres* de M. Bertrand et de M. Guilmin. M. Rouché nous semble être de la même école (*voir* la Note à la fin).

Nous le félicitons enfin d'avoir semé son livre de notions historiques. L'expérience nous a appris que les élèves écoutent avec intérêt les détails biographiques, et puisque M. Rouché sollicite les observations de ses collègues, nous nous permettrons de demander trois lignes pour chaque nom propre, placées au bas de la page et indiquant la naissance, la mort, les principaux ouvrages de l'auteur cité.

J.-Ch. Dupain,
Agrege des Sciences

Note du Rédacteur. L'homme ne peut rien *créer*, ne peut rien *anéantir*. Ces deux pouvoirs n'appartiennent qu'à Dieu. Notre zéro est un objet conventionnel. On peut prendre pour zéro tel instant de temps que l'on veut: alors toutes les années de l'avenir deviennent *positives*, celles du passé *négatives*. C'est la théorie de M. Hamilton, le célèbre géomètre de l'Irlande (*). On peut placer le zéro à tel point de l'espace que l'on veut: alors dans une direction les distances sont positives, et dans la direction opposée négatives. On peut regarder comme *nulle* telle position de fortune que l'on veut. Il est possible que M. de Rothschild considère comme n'ayant rien un homme qui ne possède qu'un million. Alors tout ce qui est au-dessus est positif et tout ce qui est au-dessous négatif. On dit même dans le langage ordinaire d'un homme endetté qu'il est au-dessous de ses affaires. Les opérations sur les quantités négatives sont donc aussi claires, aussi réelles, aussi certaines, aussi indispensables que sur les quantités positives. Vouloir n'agir que sur celles-ci et ramener les résultats négatifs à des conventions en vue de je ne sais quelle généralisation, c'est détruire la certitude apodictique de l'algèbre, c'est la réduire à une méthode contingente, c'est rétrograder jusqu'aux Arabes, aller de six siècles en arrière. Assez de gens s'attellent pour ce but au char de la raison, en philosophie, en littérature; ne les imitons pas en mathématique.

Une logique rigoureuse, la recherche et l'amour de la vérité pour elle-même, forment la partie *morale* des mathématiques, qui par là appartiennent essentiellement à l'école stoïque. Offrir à la jeunesse, au début de la vie, des applications *utiles*, des méthodes d'*approximation*, comme objet principal d'étude, c'est dénaturer le

(*) On se prépare à soutenir bientôt une thèse sur les *Quaternions* de l'illustre professeur de Dublin but de l'éducation et peut avoir de funestes résultats. Toutefois, il ne faut pas confondre cette *rigueur* avec la manie démonstrative, qui, se défiant du sens commun, enlève au lecteur toute spontanéité. Est-il bien nécessaire de prouver que lorsqu'il faut ajouter la quantité A au polynôme $a+b+c+d$, il est permis d'écrire $A+a+b+c+d$? d'établir comme corollaire que $(a^p)^q$ et $(a^q)^p$ étant tous deux équivalents à a^{pq}, donc ils sont égaux, et autres propositions analogues sur les égalités et les inégalités ? Savoir ce qu'il ne faut pas dire est un art difficile, qu'on rencontre rarement.

Les questions proposées par M. Rouché sont d'un bon choix, dans le genre de celles qu'on lit dans les traités de MM. Bertrand et Catalan. Nous garantissons aux élèves qui s'exerceront à résoudre ces questions qu'ils deviendront *forts*. Il s'y est glissé quelques fautes typographiques non indiquées. Ainsi page 163, question de la *pompe,* on lit au bas $L(H-x)(l-x)$, il faut $4(H-x)(l-x)$, faute qui se reproduit à la page suivante. A la fin de cette solution (p. 164), on lit : *puis, en multipliant* x *par la hauteur trouvée, etc.*: il y a ici quelque omission.

L'auteur donne pour les découvertes principales des dates et des notions historiques, ce qui ôte la fatigue fastidieuse que fait subir l'accumulation continue de théories sur théories, théorèmes sur théorèmes, formules sur formules. L'introduction du *point* pour désigner la multiplication est de Leibnitz et non de Jean Bernoulli.

En résumé, nous applaudissons avec M. Dupain à l'apparition d'un ouvrage qui porte le cachet du progrès. Nous signalons encore comme progrès la publication prochaine des Tables de Logarithmes de Gauss par M. le professeur Houel, savant auteur d'une savante thèse sur les équations Hamilton.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Ecoles du gouvernement; par M. *Lionnet*, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques pures et appliquées au lycée impérial Louis-le-Grand, examinateur suppléant d'admission à l'Ecole Navale. 3e édition, rédigée conformément au *Programme* officiel des lycées; autorisée par l'Université. Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire, 1857; in-8 de VIII-211 pages. Prix : 4 francs.

Les ouvrages suivants présentent une remarquable longévité littéraire :

L'Arithmétique en sa perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers, banquiers et marchands, contenant une ample et familière explication de ses principes tant en nombres entiers qu'en fractions; avec un traité de Géométrie pratique appliquée à l'arpentage et au toisé, tant des superficies que des corps solides, et un abrégé d'Algèbre, suivy de quantités de questions non moins curieuses que nécessaires. Sixième édition, par F. Le Gendre, arithméticien. A Paris, chez l'autheur, rue Chanverrerie, aboutissant en rue Saint-Denis, vis-à-vis la Reyne de Pologne. MDCLXXII. *In*-4 (*).

La 1re édition est de 1646, in-4; la 10e de Lyon, 1691, in-8. Dans le XVIIIe siècle, il y a six éditions : 1705, 1718, 1723, 1745, 1755, 1774. Dans le siècle actuel, il y en a encore deux : Paris, 1806, in-12; Lons-le-Saulnier, 1813, in-12.

Le Gendre a précédé le célèbre Barrême dont l'*Arithmétique* a paru pour la première fois en 1677 et qui a

(*) Dans la preface il dit avoir publie :

1°. Un traite des changes etrangers;

2°. La vraye manière de tenir livres de comptes ou de raison par partie double.

eu de nombreuses éditions dont la dernière est de 1811. Avignon, in-12.

Nos traités d'arithmétique actuels iront-ils aussi loin? c'est ce qu'on verra en 2058; mais le français d'aujourd'hui sera-t-il encore intelligible dans deux siècles? Possible que non, si l'anarchie grammaticale et littéraire, si la violation des règles classiques vont en augmentant. Je m'assure que déjà Racine ressuscité aurait besoin d'une certaine contention d'esprit pour comprendre grand nombre de nos poëtes, et ceux que de son temps Voltaire traitait de Welches sont des Athéniens en comparaison de certains écrivains contemporains :

> Si tu subis la loi hautaine
> De tous nos bruyants novateurs,
> Bientôt Racine et la Fontaine
> Auront besoin de traducteurs.
>
> (BÉRANGER, *Dernières chansons*, p. 122.)

Mais revenons à notre *spécialité*, locution qui aurait fait grimacer Voltaire, et avec raison (*).

Keppler, dans l'introduction de son immortel ouvrage *Astronomia nova*, fait ressortir les difficultés que présente la rédaction mathématique :

Nisi enim servaveris genuinam subtilitatem proportionum, instructionum, demonstrationum, liber non erit mathematicus; sin autem servaveris, lectio efficitur morosissima....

« Car si vous ne conservez pas la minutieuse exactitude que requièrent les expositions, les propositions, les démonstrations, l'ouvrage n'est plus mathématique; si vous la conservez, la lecture devient extrêmement rebutante. »

(*) Les langues mortes ont l'immense avantage d'être invariables. Cicéron est plus intelligible, plus clair pour nous que les romans du cycle carlovingien, que Joinville, Rabelais et même certaines pages de Montaigne.

Et plus loin il continue ainsi :

Dum igitur medeor obscuritati materiæ insertis circumlocationibus, jam mihi contrario vitio videor in re mathematica loquax, et habet ipsa etiam prolixitas phrasium suam obscuritatem non minorem quam concisa brevitas. Hæc mentis oculos effugit, illa distrahit; eget hæc luce, illa splendoris copia laborat; hic non movetur visus, illic plane excæcatur.

« Lorsque je cherche par des circonlocutions insérées dans le discours à remédier à l'obscurité de la matière, il me semble que, tombé dans le vice opposé, je deviens phrasier. D'ailleurs la prolixité entraîne une obscurité non moins grande qu'une extrême concision. Celle-ci échappe aux regards de l'esprit, celle-là en détourne; l'une est privée de lumière, l'autre pèche par excès d'éclat; ici l'œil reste fermé, là il est ébloui. »

L'auteur de cette arithmétique, professeur émérite, s'est mis en garde contre ce double écueil. Déjà nous avons rendu complète justice à la première édition (t. VI, p. 439).

Eclairé par l'expérience et aussi pour satisfaire aux exigences du moment, l'auteur a fait de notables changements de formes dans cette troisième édition.

1°. L'*Arithmétique* (3e édition), au lieu d'être divisée en cinq livres comme la deuxième, est divisée en dix-neuf chapitres.

Ce nouveau mode de divisions principales permet, sans rompre l'enchaînement théorique, de faire suivre plus immédiatement chaque groupe de principes de ses applications qui, sous le titre d'*Exercices,* terminent chacun des chapitres.

2°. L'auteur a cru devoir abandonner les subdivisions des livres ou chapitres en théorèmes et problèmes (comme c'est l'usage en géométrie élémentaire), et la remplacer par une subdivision en paragraphes numérotés.

3°. La théorie de la division des nombres entiers (chapitre IV) est beaucoup plus développée.

4°. La 2e édition ne contenait pas les approximations qui forment le chapitre X de la 3e édition.

On y remarque une théorie et une règle pratique de la division abrégée qui sont particulières à l'auteur, et dont l'usage s'est répandu dans la plupart des établissements d'instruction publique, et cette règle abrégée est rédigée d'une manière abrégée, ce qui n'est pas la chose ordinaire.

6°. Le chapitre XIII comprend quelques notions sur les anciennes mesures de France, exigées par les nouveaux programmes officiels.

7°. La théorie des proportions (chapitre XVI) a été considérablement simplifiée.

On a très-bien fait de ramener la théorie des proportions à celle des fractions; mais il y a des gens qui veulent supprimer les proportions. Ceci rappelle cet homme qui, ayant entendu dire que le grand Frédéric avait perdu une bataille pour avoir mal placé son aile gauche, conseillait de supprimer les ailes gauches.

8°. Les règles de trois, d'intérêt, de société et d'alliage (chapitre XVII et XVIII) s'appuient sur la méthode dite de *réduction à l'unité* qu'on doit au baron Reynaud.

9°. La théorie des progressions et des logarithmes est renvoyée, conformément aux programmes officiels, aux éléments d'algèbre.

10°. Le chapitre XIX comprend l'usage des logarithmes et de la règle à calcul pour abréger le calcul numérique. Il est destiné particulièrement (conformément aux programmes officiels) aux élèves de troisième (sciences).

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE; par *Maximilien Marie*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur à l'institution Notre-Dame, dirigée à Auteuil par M. Lévêque. Arnaud de Vresse, éditeur. Paris, 1857.

On a beaucoup écrit sur l'arithmétique et sous des points de vue très-variés. Reynaud, Bourdon nous ont laissé des Traités remarquables à plus d'un titre. Dans ces dernières années ont paru ceux de MM. Bertrand et Serret; tous, prenant la science des nombres pour point de départ dans les études mathématiques, en offrent les principes dans un ordre logique et procèdent du simple au composé.

Après la publication du nouveau plan d'études, certains auteurs, prenant à la lettre le texte même des programmes sans en saisir l'esprit, ont inondé le corps enseignant de publications dans lesquelles la science mutilée est souvent réduite à des proportions microscopiques. Les Leçons que nous analysons aujourd'hui pourraient être regardées comme une protestation contre la tendance de ces auteurs à supprimer dans les études les idées de généralité. M. Marie, convaincu que l'arithmétique ne peut être étudiée sans le secours de l'algèbre, abandonne les usages reçus et ne procède pas toujours du simple au composé.

L'ouvrage est divisé en trois parties : le calcul des entiers, celui des fractions et celui des incommensurables.

Après la numération, on trouve des remarques ayant pour but d'initier aux différents systèmes de numération. Les définitions des quatre opérations fondamentales n'étant point données sous un point de vue purement abstrait, exigent, notamment pour la division, de longues explications. Les procédés d'opérations sont exposés et discutés sans le secours d'exemples et repris ensuite sous forme synthétique.

Les énoncés relatifs aux principes qui se rapportent aux produits et aux quotients ont reçu des modifications presque radicales. Peut-être ne sont-elles pas heureuses, car l'élève laborieux qui veut s'instruire ne consulte pas seulement un ouvrage, et c'est lui imposer un travail pénible que de supprimer les points de repère qui lui marquent le droit chemin.

La recherche du plus petit multiple commun est basée uniquement sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. En ce point, nous signalons une lacune fâcheuse, car les procédés de décomposition sont impraticables pour des nombres qui n'admettent que des facteurs premiers un peu grands. La méthode du plus grand commun diviseur n'est pas *un exercice*, c'est une méthode sûre, tandis que l'autre n'est qu'un expédient en usage dans les cas très-simples.

Le calcul des fractions est précédé de la théorie des rapports et proportions. L'auteur analyse avec beaucoup de soin tous les cas relatifs à l'expression du rapport des grandeurs homogènes. Les avantages qui résultent de l'emploi de la plus grande commune mesure, les conditions d'égalité des rapports de grandeurs incommensurables, forment un corps de doctrine complet et nettement exposé.

Dans le retour des quotients périodiques aux génératrices, l'auteur laisse à l'élève une tâche trop rude en l'engageant à rétablir lui-même ce qui manque de rigueur à son raisonnement. La sommation d'un nombre illimité de quantités décroissantes et suivant une loi déterminée, n'est pas facile à deviner, et le premier exemple qui se présente devrait être traité sans restrictions.

Un chapitre est consacré à la résolution des règles de trois et aux applications. L'auteur n'a pas cru qu'il fût nécessaire d'exposer le système métrique, les anciennes mesures et leurs rapports mutuels.

Dans le calcul des incommensurables, on distingue d'abord des notions sur la continuité des fonctions et la théorie générale des approximations. Les méthodes basées sur les erreurs absolues sont suivies de celles qui résultent de la considération des erreurs relatives, l'auteur met en évidence la simplicité de ces dernières. Viennent ensuite les opérations abrégées, une théorie des racines de degré p servant de base aux procédés d'extraction des racines carrées et cubiques des trois espèces de nombres. Cette partie est complétée par un procédé abrégé dû à Wantzel pour calculer une racine composée d'un grand nombre de chiffres.

L'ouvrage se termine par la théorie des progressions et des logarithmes, précédée du calcul des radicaux et des exposants de nature quelconque.

De nombreux exercices accompagnent chaque théorie : en cela M. Marie a suivi l'exemple des bons auteurs.

F.-A. Beynac,
Professeur.

Note du Rédacteur. Cette Arithmétique s'adresse principalement aux adeptes de la philosophie dite *positive;* le style, l'exposition, les méthodes, tout rappelle la manière du célèbre chef que cette école a récemment perdu. Une seule citation suffit pour donner une idée générale de l'esprit qui règne dans l'ouvrage. A propos de la soustraction, considérée comme opération *inverse* de l'addition, on lit (p. 13) :

« Plus généralement, deux fonctions, composées d'opé-
» rations en nombre plus ou moins considérable, sont
» inverses l'une de l'autre, lorsque le dernier résultat

» des opérations successives qui constituent la première
» de ces fonctions étant successivement soumis aux opé-
» rations qui entrent dans la seconde, la grandeur, quelle
» qu'elle soit, qui a éprouvé tous ces changements, revient
» à son état primitif. »

On voit bien que ces Leçons ne sont pas destinées à des commençants. Nous adhérons complétement à ce qu'on lit dans la préface, que l'algèbre, cette arithmétique universelle, facilite l'intelligence et l'enseignement de l'arithmétique chiffrée.

LOGARITHMORUM VI DECIMALIUM NOVA TABULA BEROLINENSIS, et numerorum vulgarium ab 1 usque ad 100000, et functionum trigonometricarum ad decades minutorum secundorum; auctore *Carolo Bremiker*, dr. ph. Berolini, 1852. 1 volume in-8 : préface et introduction 82 pages, Tables 524 pages.

Ursinus, astronome danois, publia à Copenhague, en 1827, des Tables de logarithmes à six décimales dont il a déjà été question dans les *Nouvelles Annales*, tome XVI, page 128. Ces Tables, à la fois correctes et commodes, présentaient cependant quelques inconvénients, que M. Bremiker a su éviter dans l'ouvrage qu'il a composé sur le même plan qu'Ursinus et dont nous allons rendre compte.

Nous donnerons d'abord une analyse de la préface de M. Bremiker. Cette préface, très-instructive, contient la description des Tables avec l'exposé raisonné des principes qui ont présidé à leur construction.

L'auteur fait d'abord remarquer que la grande habitude du calcul logarithmique peut seule faire apprécier les avantages et les défauts d'une Table; et c'est ce qui explique les imperfections de la plupart des Tables actuelles, dont la construction a été laissée à de simples théoriciens.

M. Bremiker prouve ensuite, comme l'avait déjà prouvé Ursinus, que six décimales sont suffisantes pour les besoins *ordinaires* de l'astronomie, puisqu'elles peuvent faire connaître les angles à un quart de seconde près, ce qui est assez pour le calcul des éphémérides, et à plus forte raison pour le calcul des observations astronomiques et géodésiques, et surtout pour les applications à la topographie et à la navigation.

Un des avantages de la suppression de la septième décimale dans les Tables usuelles, c'est de rendre dix fois plus petites les différences tabulaires. L'utilité de cette réduction des différences est surtout sensible dans les Tables trigonométriques, où il faut en même temps que l'argument croisse par intervalles assez rapprochés pour que les différences secondes n'exercent aucune influence. Taylor et, après lui, Bagay et Shortrede ont construit des Tables trigonométriques à sept décimales procédant de seconde en seconde. Mais on a été forcé, pour diminuer le volume de ces Tables, qui est encore resté très-considérable, de supprimer les différences et d'employer des moyens d'abréviation qui en rendent l'usage pénible. Il est donc préférable, lorsqu'on veut calculer avec sept décimales, d'employer des Tables procédant de 10 secondes en 10 secondes, comme celles de Gardiner ou de Callet. La grandeur des différences et leur variation rapide ne permettant pas d'insérer dans chaque page les parties proportionnelles des différences, on peut avoir recours avec beaucoup d'avantage à la Table construite exprès par M. Bremiker (*) ou aux grandes Tables de multiplication de Crelle (**).

(*) *Tafeln der Proportionaltheile*. Berlin, bei Dummler; 1843.

(**) *Rechentafeln*. Berlin; 1857. On les trouve chez Mallet-Bachelier, libraire.

Mais lorsque l'on ne conserve que six décimales, on peut, presque dès le commencement de la Table, écrire en marge les parties proportionnelles des différences, et c'est ce qu'a fait M. Bremiker à partir de 5 degrés. De plus, pour les Tables trigonométriques comme pour la Table des logarithmes des nombres, les parties proportionnelles sont données *exactement* avec une décimale, de sorte que l'interpolation peut se faire par leur moyen avec toute l'exactitude que comportent les Tables.

M. Bremiker a choisi, pour l'impression de ses Tables, le caractère elzevirien, que la typographie a malheureusement cessé d'employer depuis le commencement de ce siècle, et auquel nous espérons que l'on reviendra, comme semblent le prouver quelques tentatives heureuses faites dans ces derniers temps en France et en Angleterre. Ce caractère fatigue beaucoup moins la vue que le caractère moderne de hauteur uniforme, et les chiffres y sont beaucoup plus distincts les uns des autres (*).

Dans la disposition des pages, le but de l'auteur a été qu'une fois le livre ouvert à la page convenable, on puisse, sans avoir besoin de lire les chiffres, indiquer immédiatement l'endroit de la page qui répond à l'argument donné. Chaque page de la Table des logarithmes des nombres contient cinquante lignes au lieu de quarante comme dans les Tables d'Ursinus : de cette manière, l'ensemble de deux pages en regard contient exactement mille logarithmes. Cette disposition était déjà adoptée dans la plupart des Tables à sept décimales, telles que celles de Vega, de Babbage, etc.

Dans les Tables à sept décimales, on détache généra-

(*) *Voyez* la Note de M. Bailleul (*Bulletin bibliographique*, t. II. p. 155). Cette Note montre combien les chiffres français, qui ont conservé presque tous les avantages du caractère elzevirien, l'emportent pour la clarte sur les chiffres d'égale hauteur.

lement les trois premières figures communes à plusieurs logarithmes consécutifs, et que l'on écrit une fois pour toutes, en indiquant, s'il y a lieu, le changement de la troisième décimale dans le courant d'une même ligne soit par un signe particulier, tel qu'un astérisque, un chiffre de forme différente, etc., soit en brisant les lignes, comme l'a fait Callet. M. Bremiker a rejeté, avec beaucoup de raison selon nous, le moyen inventé par Callet. Mais peut-être le signe qu'il emploie dans le même but (un petit trait horizontal placé au-dessus du premier chiffre de chaque nombre de la ligne) n'est-il pas aussi distinct que l'astérisque dont se sert Vega. Il est vrai que l'emploi de ce signe est beaucoup plus rare que dans les Tables dont nous venons de parler, M. Bremiker ne détachant que deux chiffres au lieu de trois (*).

Les pages sont partagées en tranches de dix lignes par des filets placés au-dessus et au-dessous de chaque dixième ligne; les neuf lignes intermédiaires sont divisées par des blancs en groupes de trois. Nous ne saurions dire si cette disposition compliquée est plus avantageuse que la disposition plus simple, adoptée entre autres par Vega et Babbage, et qui consiste à séparer les lignes de cinq en cinq par des blancs, sans filets horizontaux, surtout si l'on fait ces blancs alternativement plus grands et plus petits comme dans les Tables de Shortrede.

Au bas de chaque page se trouvent deux petites Tables indiquant, pour deux échelles décuples l'une de l'autre, la conversion en degrés et minutes des nombres de la page considérée comme représentant des secondes. Il n'eût

---

(*) Ursinus detache trois chiffres et marque le changement du troisieme, dans le courant d'une ligne, par une petit trait pareil a celui de M Bremiker, mais place seulement sur le premier zero pour lequel le changement a lieu, ce qui peut donner lieu à de frequentes erreurs.

pas été difficile d'y joindre les logarithmes des rapports

$$\frac{x}{\sin x}, \quad \frac{\operatorname{tang} x}{x},$$

qu'Ursinus donne en haut de chaque page, et qui sont utiles pour calculer les logarithmes des sinus et des tangentes des petits arcs.

A la fin de la Table des logarithmes des nombres est une Table de conversion réciproque des logarithmes vulgaires et naturels.

Les Tables trigonométriques se composent de deux parties, dont l'une contient les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés. Jusqu'à $0^\circ\, 20'$, la disposition est la même que dans la partie correspondante des Tables de Callet. A partir de là, la Table est à double entrée, la première colonne à gauche donnant les dizaines de seconde, et les colonnes suivantes les unités. Pour que l'on puisse appliquer commodément à cette disposition la double graduation des Tables trigonométriques ordinaires, on a ajouté une onzième colonne marquée $10''$ en haut et $0''$ en bas, et formée en répétant à la fin de chaque ligne le premier nombre de la ligne suivante.

La seconde partie contient les logarithmes des sinus et des tangentes de 10 secondes en 10 secondes pour tous les degrés du quart de cercle. La disposition diffère peu de celle des Tables de Callet. Seulement, comme dans les Tables de Lalande et d'Ursinus, l'ordre des colonnes est

Sin.,	Tang.,	Cotang.	Cosin.,
Cosin.,	Cotang.,	Tang.,	Sin.

Cet ordre est plus symétrique que celui de Callet par rapport à la double graduation.

A partir de 5 degrés, on a placé en marge les parties proportionnelles des différences. Pour des angles plus petits, on a plus d'avantage en recourant à la première partie de la Table ou aux moyens dont nous parlerons plus tard.

Le recueil est terminé par des Tables auxiliaires donnant la conversion des parties d'arc, soit en parties de rayon, soit en parties de jour, celle du temps sidéral en temps moyen et réciproquement, et enfin par une Table de nombres usuels avec leurs logarithmes.

M. Bremiker donne ensuite des détails sur les soins qu'il a pris pour assurer la correction de ses Tables. Il les a comparées d'abord avec le *Thesaurus logarithmorum* de Vega, et tous les logarithmes du *Thesaurus* dont les derniers chiffres sont 5000 ou diffèrent peu de 5000 ont été calculés de nouveau avec une plus grande précision. L'épreuve a été satisfaisante pour la Table des logarithmes des nombres, qui ont été chaque fois reconnus exacts. Mais il n'en a pas été de même pour les Tables trigonométriques, où Vega n'avait fait que reproduire, avec des corrections insuffisantes (*), les Tables de la *Trigonometria artificialis* de Vlacq. M. Bremiker a vérifié 125 logarithmes de ces Tables au moyen de la *Trigonometria britannica*. Sur ces 125 logarithmes, 44 seulement ont été reconnus exacts; 58 étaient en erreur d'une unité sur la dernière figure, 18 de deux unités, 4 de trois unités, 1 de cinq unités. En estimant d'après la même proportion le nombre d'erreurs que doit con-

(*) Vega ne s'est pas même donné la peine de collationner ses Tables avec la *Trigonométrie britannique*, qui lui aurait fourni un contrôle immédiat de 15 minutes en 15 minutes, et même, pour le commencement de sa Table, de 36 secondes en 36 secondes. Ainsi les logarithmes du sinus et de la tangente de 0° 15′ sont en erreur d'une unité du dixième ordre, et *plus de la moitié* des logarithmes communs aux deux Tables sont dans le même cas.

tenir la Table entière, il en résulterait que sur les 68040 logarithmes qu'elle renferme 44050 doivent avoir besoin de correction.

Ces imperfections des Tables à dix décimales, où la dernière décimale est toujours incertaine, ont produit un grand nombre d'inexactitudes dans les Tables à sept décimales que nous possédons, lesquelles ne sont en général que des éditions abrégées des anciennes Tables de Vlacq (*). De toutes ces éditions, la plus exacte est celle de Gardiner (1742), qui a pris, il est vrai, ses logarithmes dans les Tables de Vlacq, mais après les avoir corrigés avec le plus grand soin par la comparaison des différences (**) ; et si l'on collationne les Tables de Gardiner avec celles de Taylor, comparées un demi-siècle plus tard (1792), on trouve que dans les cas assez nombreux où les deux auteurs sont en désaccord, c'est toujours le nombre donné par Gardiner qui est le vrai. Les Tables de Callet n'étant, pour la partie principale, qu'une reproduction de celles de Gardiner, participent naturellement à leur exactitude. Mais il faut en excepter la partie calculée par Callet lui-même, c'est-à-dire celle qui contient les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour le cinquième degré. M. Bremiker a reconnu dans

---

(*) Pour n'en citer qu'un exemple, on trouve dans les Tables de Vega (Leipzig, tirage de 1854) $\log \operatorname{tang} 7^{\circ}\, 59' = 9{,}1468850$ au lieu de $9{,}1468849$. Cette faute provient d'une erreur de deux unités commise par Vlacq sur la dixième décimale ; les trois derniers chiffres sont 501 dans les Tables de Vlacq, tandis qu'ils devraient être 499.

(**) Si l'on forme le tableau des logarithmes des fractions $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$, d'après l'*Arithmetica logarithmica*, on aperçoit dans les différences secondes des irrégularités trop fortes pour qu'on puisse les attribuer à des erreurs de moins d'une unité sur la dernière figure, telles qu'on devrait en attendre si les logarithmes de x, de $\sin x$ et de $\operatorname{tang} x$ étaient tous approchés à moins d'une demi-unité près.

cette seule partie (tirage de 1821) plus de *mille* fautes sur la dernière décimale. En présence d'une telle assertion, il nous semblerait urgent qu'on procédât à une révision scrupuleuse de cette partie d'un recueil si justement estimé.

La Préface est suivie d'une Introduction où se trouve d'abord expliqué l'usage des Tables. Nous en extrayons seulement quelques remarques. Pour obtenir avec six décimales les logarithmes des sinus et des tangentes des arcs moindres que 5 minutes, on peut prendre simplement le logarithme de l'arc évalué en parties de rayon. Pour les arcs plus grands, jusqu'à 1 degré environ, on corrige cette valeur au moyen de la formule de Maskeline

$$\sin x = x \sqrt[3]{\cos x} + \frac{x^6}{4^5} + \ldots,$$

qui, réduite à son premier terme, donne

$$\sin x = x \sqrt[3]{\cos x}, \quad \operatorname{tang} x = \frac{x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$$

Dans la résolution d'un triangle rectiligne, donné par deux côtés et l'angle compris, il est avantageux, si l'on veut obtenir tous les autres éléments du triangle, d'employer les formules

$$a \sin \frac{1}{2}(B - C) = (b - c) \cos \frac{1}{2} A,$$

$$a \cos \frac{1}{2}(B - C) = (b + c) \sin \frac{1}{2} A,$$

analogues aux formules de Delambre ou de Gauss.

L'Introduction est terminée par un Mémoire sur les erreurs que l'on peut commettre dans le calcul logarithmique par suite de l'inexactitude des Tables, qui ne peuvent donner les logarithmes qu'à une demi-unité près du dernier ordre. Le calcul de l'erreur commise sur une formule se réduit à une différentiation après laquelle on doit remplacer les différentielles des diverses quantités par des nombres quelconques compris entre les limites d'erreur dont ces quantités sont susceptibles. Si l'on prend ces nombres égaux aux limites supérieures des erreurs, on obtiendra une limite supérieure de l'erreur que l'on peut commettre sur la valeur de la formule.

Mais il s'en faut beaucoup que la limite supérieure ainsi déterminée puisse servir de guide dans les calculs pour évaluer l'approximation sur laquelle on est en droit de compter. En général, il s'établit entre les erreurs partielles une compensation qui atténue beaucoup l'erreur définitive.

Pour obtenir une règle plus près de la pratique, il faut avoir recours au calcul des probabilités qui fait connaître la probabilité que l'erreur soit comprise entre deux limites données plus petite que la limite supérieure. Ne pouvant entrer ici dans aucun détail sur l'analyse de l'auteur, nous nous contenterons de citer un exemple à l'appui de ce que nous annoncions tout à l'heure; cet exemple donnera une idée de l'intérêt et de l'importance de ce genre de recherches.

Soit proposé de calculer par logarithmes le produit de vingt facteurs dont les logarithmes sont tous connus à moins d'une demi-unité près du dixième ordre. La limite supérieure de l'erreur que l'on pourra commettre sur le logarithme du produit sera $\frac{1}{2} \times 20$ ou 10 unités du dixième ordre. Mais il ne faut par croire que 10 représente l'erreur que l'on aura à craindre en général. Si l'on calcule les probabilités que les erreurs soient comprises entre les intervalles 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3 etc., on trouve les résultats suivants où les probabilités sont évaluées en vingtièmes d'unité :

Intervalles.	Probabilites.
0 — 1	11,172
1 — 2	6,388
2 — 3	2,050
3 — 4	0,356
4 — 5	0,032
5 — 6	0,002
6 — 10	0,000

En calculant maintenant vingt sommes, chacune de vingt logarithmes consécutifs, pris dans le commencement de la Table, l'auteur a trouvé pour les nombres d'erreurs correspondants à chacun des intervalles précédents :

0 — 1	13
1 — 2	4
2 — 3	2
3 — 4	1

En comparant ces nombres aux probabilités données ci-dessus, on trouve un accord surprenant, eu égard au petit nombre des épreuves qui ont donné ces résultats.

La probabilité que l'erreur soit comprise entre 9 et 10 est égale à l'unité divisée par le nombre

2 432 900 000 000 000 000.

Ce Mémoire est terminé par une application des formules pour le calcul de l'erreur probable, à divers problèmes de trigonométrie sphérique et par des remarques sur l'utilité de ce calcul dans le choix des formules (*).

Nous espérons que cet aperçu suffira pour faire comprendre les qualités précieuses de cet excellent ouvrage, et pour justifier la grande réputation dont il jouit en Allemagne.

HOUEL, Professeur.

(*) Toute methode pratique d'approximation est *borgne* quand on ne sait pas calculer l'erreur probable. TM

Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et sur les surfaces isothermes; par M. *Lamé*, membre de l'Institut. In-8 avec figures dans le texte; 1857. Prix : 5 francs. (Chez Mallet-Bachelier.)

Un grand nombre de questions de mécanique, de géométrie et d'analyse conduisent aux transcendantes elliptiques et à leurs fonctions inverses. Le développement de cette branche importante de l'analyse a été lent et pénible. Maclaurin, d'Alembert, Fagnano, Euler, Lagrange et Landen s'en sont occupés les premiers (*). L'infatigable Legendre a passé la plus grande partie de sa vie à l'étendre et à la perfectionner. Enfin Abel et Jacobi, par leurs remarquables travaux, ont achevé de couronner cet édifice élevé avec tant de peine.

Après tant d'efforts multipliés, après tant de difficultés vaincues, il a fallu songer à réunir en corps de doctrine tous les résultats disséminés dans les journaux et les collections scientifiques. A la vérité, nous possédons depuis longtemps le grand Traité de Legendre et les *Fundamenta nova* de Jacobi. Le premier de ces ouvrages, malgré les suppléments qui sont dans le troisième volume, est insuffisant, et le second est d'une lecture si difficile, qu'il rebute la plupart des personnes qui en entreprennent l'étude. Pour rédiger ce cours de trigonométrie des fonctions elliptiques, il semble que la méthode la plus naturelle et peut-être la plus simple devait être celle qui avait fait inventer leurs diverses propriétés, c'est-à-dire la méthode analytique. M. Lamé a préféré suivre une autre voie : la théorie de la chaleur sert de base à son exposition. Cette application des *mathématiques appli-*

(*) Cherchant à évaluer l'aire du cylindre oblique, Pascal fait emploi de fonctions appelées depuis *elliptiques*. Tm.

quées à l'analyse pure simplifie singulièrement l'étude des transcendantes et des fonctions elliptiques de première espèce. Les surfaces isothermes, inventées par M. Lamé, donnent une représentation très-simple de ces transcendantes et de ces fonctions. Les trois variétés de transcendantes elliptiques de première espèce sont exprimées par les températures relatives aux trois surfaces homofocales du second ordre, et leurs fonctions inverses sont les axes mêmes de ces surfaces. C'est en traitant le problème de l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux que M. Lamé a été conduit à ces résultats. C'est pour la première fois que, dans une question de physique mathématique, on soit arrivé aux transcendantes elliptiques. Le lecteur jugera aisément avec quelle habileté et quelle persévérance le savant académicien à poursuivi ses recherches sur ce terrain qui lui appartient tout entier. Le service rendu à l'analyse est considérable; car l'étude des fonctions elliptiques est rendue accessible à un plus grand nombre de personnes. D'ailleurs, maintenant que l'élan est donné, nous aimons à croire que nous verrons paraître avant longtemps sur le même sujet un traité fondé sur l'analyse pure. Quoi qu'il arrive, l'ouvrage de M. Lamé restera toujours comme un livre original et d'une extrême simplicité.

Il nous reste maintenant à en donner une idée très-sommaire. L'auteur, après avoir exposé les notions nécessaires sur la théorie des surfaces isothermes, s'occupe spécialement des cylindres elliptiques et hyperboliques, ainsi que des surfaces de révolution du second ordre. Il trouve pour les fonctions inverses de ces surfaces les six lignes trigonométriques ordinaires et les six lignes trigonométriques hyperboliques ou fonctions exponentielles. La même étude fait trouver successivement toutes les transcendantes du calcul intégral ordinaire, c'est-à-dire toutes celles qui s'intègrent par des arcs de cercles ou par des logarithmes. L'auteur aborde ensuite les surfaces homofocales du second ordre dans le cas général; il arrive à des transcendantes et à des fonctions inverses dont les précédentes ne sont que des cas particuliers. Les propriétés bien connues des fonctions trigonométriques et exponentielles font prévoir la plupart de celles des nouvelles fonctions. Ainsi les fonctions trigonométriques ayant une période réelle et les fonctions exponentielles une période imaginaire, les fonctions elliptiques posséderont la double périodicité. On aura pareillement les règles de l'addition et de la multiplication. Enfin les sinus et les cosinus forment diverses séries propres a représenter une fonction arbitraire entre certaines limites de la variable; de même les fonctions elliptiques de première espèce serviront à former des séries plus générales. Toutes ces questions sont traitées avec la lucidité qui caractérise l'éminent professeur et d'une manière aussi élémentaire que le comporte le sujet. Il y a trois questions principales savoir : les formules d'addition d'Euler, la double périodicité des fonctions inverses et la multiplication des transcendantes d'Abel, et enfin le problème épineux de la transformation de Jacobi. Les limites dans lesquelles nous sommes obligé de rester ne nous permettent point de donner une idée de tout ce qu'il y a de neuf et d'original dans ce livre. D'ailleurs une analyse, fût-elle très-développée, serait toujours insuffisante, vu le nombre et la variété des détails. Le lecteur n'a rien de mieux à faire que de recourir à l'ouvrage lui-même. Nous nous contenterons de faire une ou deux remarques. En trigonométrie, on sait qu'on considère plusieurs fonctions, bien qu'on puisse les exprimer toutes au moyen d'une seule. De même M. Lamé considère neuf fonctions elliptiques et démontre en quelque sorte la nécessité de les maintenir séparément, malgré les relations qui permettraient de les exprimer à l'aide de trois d'entre elles. A ces neuf fonctions correspondent neuf autres fonctions qui leur sont conjuguées. Ainsi en tout il y a dix-huit fonctions réparties en plusieurs groupes; pour les distinguer entre elles, on leur a donné des noms particuliers. Nous recommandons les tracés graphiques analogues à ceux qu'on fait pour les lignes trigonométriques; ils sont très-utiles pour fixer dans la mémoire les propriétés des fonctions elliptiques. L'ouvrage se termine par des applications à la théorie de la chaleur; dans cette partie se trouvent réunis tous les développements relatifs aux séries de Fourier, de Laplace et de M. Lamé. Ce livre, comme toutes les productions du géomètre que Jacobi appelait *un des mathématiciens les plus pénétrants*, a un cachet caractéristique. Qu'il nous soit permis, en terminant, de concevoir l'espérance que l'auteur des *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* donnera prochainement au monde savant un autre ouvrage traitant d'une manière générale des *coordonnées curvilignes* et des *coordonnées elliptiques*, en suivant l'ordre des idées qui les ont fait découvrir et non l'exposition synthétique adoptée dans tous les écrits qui ont paru sur ce sujet. Ce sera un nouveau service rendu aux sciences.

Enfin ne serait-il pas à désirer, maintenant que l'importance des fonctions elliptiques est reconnue de tout le monde, ne serait-il pas à désirer qu'on eût des Tables pour ces fonctions comme on en a pour les fonctions trigonométriques ordinaires et hyperboliques (*)? On ne verrait plus si souvent cette phrase banale : *le problème étant ra-*

(*) M. Hermite vient d'exprimer les racines des équations du cinquième degré en fonctions elliptiques, premier pas immense. Tm.

mené aux quadratures, il est considéré comme résolu. Espérons que l'Académie des Sciences, à qui revient toute initiative de ce genre, fera exécuter ce long travail, sous la direction de quelques-uns de ses membres.

J. Garlin.

Transformation des propriétés métriques des figures a l'aide de la théorie des polaires réciproques; par M. *A. Mannheim*, lieutenant d'artillerie. In-8 avec figures dans le texte; 1857. Prix : 2fr 50c, chez *Mallet-Bachelier*, libraire.

Les propriétés des figures se divisent en deux classes : les propriétés *descriptives* où l'on ne tient compte que de la situation des lignes les unes à l'égard des autres et les propriétés *métriques* où l'on s'occupe de la grandeur des segments et des angles.

Lorsque l'on transforme une figure par un procédé métamorphique, l'on obtient une autre figure qui doit nécessairement, quoique sous une autre forme, rappeler les propriétés de la première. La transformation d'une propriété purement descriptive est en général facile; il n'en est pas de même des propriétés métriques. Voici ce que dit à ce sujet l'auteur de la *Géométrie supérieure* relativement aux transformations homographiques et corrélatives (p. 614). « L'application des deux méthodes est » toujours facile en ce qui concerne les relations descrip- » tives des figures, mais il n'en est pas de même des rela- » tions métriques, soit des segments, soit des angles : ces » relations pouvant présenter beaucoup de difficultés *ou* » *se refuser même à la transformation.* »

M. Mannheim, prenant pour base de ses transformations la théorie des polaires réciproques, rappelle les travaux de MM. Poncelet, Chasles, etc., sur le même sujet, puis énonce ainsi la question qu'il se propose de résoudre : *Transformer à l'aide de la théorie des polaires réciproques une relation métrique sans lui faire subir aucune préparation. Déterminer immédiatement les différentes formes sous lesquelles se serait présentée la relation transformée si l'on avait opéré sur différentes formes de la relation donnée.*

L'auteur adopte pour courbe directrice un cercle d'un rayon égal à l'unité linéaire, de cette manière il transforme immédiatement les relations angulaires, puisque l'angle de deux droites est égal à l'angle des droites qui vont du centre du cercle directeur aux pôles des droites. Les relations métriques de distances se transformeront à l'aide du théorème suivant : *Le rayon de la circonférence directrice est moyen proportionnel entre la distance du centre au pôle et à la polaire.*

On parvient à une relation fondamentale (1) qui, modifiée de différentes manières, donne une série de formules placées dans un tableau général (p. 56).

Dans les articles I, II, III, IV, on transforme la distance d'un point à une droite, la propriété du carré de l'hypoténuse, ce qui conduit à plusieurs théorèmes intéressants. De la relation $ab + bc = ac$, qui a lieu entre trois points situés en ligne droite, on déduit celle qui existe entre quatre points d'une droite ou d'un cercle, etc.

La même égalité conduit (article IV) à différentes formes du rapport anharmonique et des divisions homographiques.

L'article V, *systèmes de coordonnées,* donne des formules pour trouver l'équation de la polaire réciproque d'une courbe donnée, que cette courbe soit considérée comme lieu géométrique d'un point ou comme l'enveloppe d'une droite. L'article suivant traite de la transformation de démonstration; il a pour but de faire voir que connaissant la démonstration analytique ou géométrique d'un théorème, on obtiendra celle du théorème polaire en transformant successivement les différentes équations qui ont conduit à la démonstration du premier. On applique cette méthode à divers exemples.

M. Chasles, dans la *Géométrie supérieure*, explique pourquoi il n'a pas fait usage dans le cours de son ouvrage des méthodes de transformation, et voici la principale raison qu'il en donne (p. 608). « Par les méthodes » de transformation, on fait un théorème déterminé avec » un autre déjà connu. On peut former ainsi une collec- » tion plus ou moins ample de propositions. Mais ces » propositions sont en quelque sorte isolées; elles man- » quent de liens entre elles; on ne saurait les déduire les » unes des autres, lors même qu'on voit qu'elles se rappor- » tent à une même théorie, etc. » Nous pensons cependant, avec l'auteur du Mémoire, que si l'on peut dans un système métamorphique déterminé, transformer la longueur d'un segment pris isolément (c'est le problème le plus difficile de ce genre de recherche), on pourra par ce seul fait non-seulement transformer une propriété d'une figure, mais encore parvenir à la démonstration directe du théorème auquel on arrive. De sorte que si l'on a une série de propositions A, B, C, etc., liées les unes aux autres de manière à former une théorie, les propositions transformées A', B', C', etc., auront aussi entre elles un certain enchaînement qu'il sera bien facile d'apercevoir (introduction, XVIII).

Dans la chapitre VII, on donne différentes expressions de l'aire d'un triangle; il suffit à l'auteur de transformer la base et la hauteur du triangle donné pour obtenir la relation cherchée.

L'ouvrage de M. Mannheim traite principalement des transformations dans les figures planes, cependant dans le dernier article on donne différentes expressions de l'aire d'un triangle dans l'espace et du volume d'un tétraèdre, en prenant pour surface directrice une sphère.

FAURE.

LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE, *entièrement* conformes aux *nouveaux Programmes* de l'enseignement des lycées, contenant *toutes* les connaissances *nécessaires* à ceux qui se destinent au Baccalauréat ès Sciences, aux Ecoles spéciales du gouvernement, à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures et à ceux qui suivent les cours des écoles professionnelles et des nouvelles Facultés des Sciences appliquées; par MM. *Henri Harant*, licencié ès Sciences, et *Pierre Laffitte*, professeur de mathématiques. In-8 de XI-369 pages, avec 195 figures intercalées dans le texte et une planche in-8.

La *Mécanique* renferme deux parties distinctes : 1° la *phoronomie*; 2° la *mécanélogie*.

1°. *Phoronomie*. Les lois qui régissent ces causes mystérieuses agissant sans intermédiaire connu et désignées sous le nom de *forces*, constituent la *phoronomie*. Telles sont les attractions astronomiques, physiques, chimiques, électriques, magnétiques, thermiques, etc., causes du mouvement, que Kepler désigne sous le nom poétique et très-expressif *âme*. En effet, ces causes agissent comme l'âme sans qu'on puisse savoir le *comment*. Toute la nature est gouvernée par la phoronomie. L'étude des lois émanées du modérateur des mondes est le but de cette science, et, comme toute science, elle est fondée sur des principes qui ne font pas partie de la science, qui ne sont pas démontrables. Il faut donc bien se garder de recourir à l'expérience pour y trouver la démonstration. Recourir à l'*empirisme*, c'est détruire la certitude. Aristote dans ses *Analytiques* donne ces avertissements si logiques :

Ου δεῖ εν ταῖς επιστημονικαῖς ἀρχαις ἐπιζητεῖσθαι τὸ διὰ τι.

« Dans les premiers principes, on ne doit pas demander le pourquoi. »

Il ajoute :

Τὰ μὴ δι ἑτέρων ἀλλὰ δἰ αὑτῶν ἔχωντα τὴν πίστιν.

« Ils ne tiennent pas leur certitude d'ailleurs, mais d'eux-mêmes. »

Α᾽ποδειξεως ἀρχὴ ουκ ἀποδειξις.

« Le *principe* de la *démonstration* n'est pas une *démonstration.* »

On oublie trop souvent ces sages avertissements.

2°. *Mécanélogie.* Cette partie de la science s'occupe de forces agissant par l'intermédiaire de corps qui prennent alors le nom de *machines*. Tels sont les divers leviers, le plan incliné, vis, treuils, etc. On y fait bien usage des doctrines phoronomiques, mais la mécanélogie n'est pas la phoronomie, pas plus que l'arpentage n'est la géométrie, quoiqu'on y fasse emploi de la géométrie. Le but de la mécanélogie est de produire certains effets, d'obtenir certains résultats matériellement *utiles*. Le but est un intérêt lucratif. On comprend que dans un siècle où l'esprit du *gain* s'est emparé de tous les esprits, où toutes les aspirations, locution ascétique très en vogue chez nos épicuriens, tendent vers le bien-être que procure la richesse, on comprend comment la mécanélogie est parvenue à occuper la première place et à pousser la phoronomie sur le second plan.

La mesure de la force n'est pas la même dans les deux parties de la science. La phoronomie ne considère et n'a besoin de considérer que la masse et la vitesse ; dès lors la mesure de la force est naturellement indiquée par le produit de ces deux facteurs, très-bien désigné sous le nom de *quantité de mouvement*. Dans la mécanélogie cela ne suffit pas; là, on veut connaître le *bénéfice*, ce que produit la force; c'est ce bénéfice qu'on nomme *quantité de travail*; il est la moitié d'un certain produit que Leibnitz a malheureusement baptisé sous le nom de *force vive*, quoiqu'il n'y ait dans cette multiplication ni vitalité, ni force; le mot étant généralement admis, ce serait un inconvénient de le supprimer. Ce sont quatre syllabes dont les sons rappellent un certain produit La quantité de travail possède cet avantage important de pouvoir être rendue manifeste par des appareils dynamométriques.

Les nouveaux programmes contiennent trente-deux questions. MM. Harant et Laffitte élucident et résolvent ces questions l'une après l'autre.

L'ouvrage est divisé en trois parties : 1° mouvement (1-94); 2° des forces et de leurs effets (95-199).

Les auteurs attribuent aux corps une *activité propre* et nient l'inertie, c'est-à-dire l'incapacité de la matière à se mouvoir d'elle-même (*voir* la note à la fin). Je ne sais ce que les docteurs de l'ancienne Sorbonne auraient pensé d'une telle assertion. Les corps ne peuvent agir les uns sur les autres par le choc, puisque tout contact entre molécules est impossible; ils agissent, selon Boscowich, comme par attraction positive et négative et à distance. La communication de mouvement se fait, on ne sait comment, de molécule à molécule, et, jusqu'à ce que toutes les molécules soient atteintes, il s'écoule un certain temps; c'est ce temps qui est l'origine des idées embrouillées sur la force d'inertie.

3°. *Des machines* (202-361). C'est la partie la plus instructive et la plus intéressante. Les figures sont bien faites et les explications très-claires. On y donne des applications aux diverses machines industrielles aujourd'hui existantes. Tout ce qui concerne la *vapeur* est mis à la portée des gens du monde instruit.

Au résumé, il faut savoir ce que l'on veut. Voulez-vous vous préparer à un examen universitaire, industriel quelconque, devenir contre-maître, directeur d'usines, manufactures, etc., lisez la *Mécanélogie* de MM. Harant et Laffitte. Voulez-vous apprendre la science, étudiez la *Mécanique* de Poisson, puis les Traités de MM. Delaunay, Duhamel, les *Exercices* de M. l'abbé Jullien et la *Mécanique moléculaire* de M. Lamé.

Note. La matière inerte, la matière avec volonté (animal), avec volonté intelligente (homme) sont trois catégories d'êtres séparées par des abîmes infranchissables. Les philosophes, constructeurs de ponts, ne manquent pas. Mais ce qui manque à ces philosophes, c'est la science précieuse de *savoir ignorer*, le *aliqua nescire* de Quintillien (lib. I, chap. V, *ad finem*).

PROSPECTUS JOANNIS KEPLERI ASTRONOMI OPERA OMNIA, edidit *Ch. R. Frisch*. Studgartiæ, mense Majo, 1857.

L'ouvrage paraîtra en huit volumes in-8; le prix de chaque volume ne dépassera pas 12 francs. Cette édition renfermera aussi la correspondance inédite déposée à l'observatoire de Pulkova.

Les principaux astronomes de l'Allemagne ont souscrit; il en sera sans doute de même dans les autres pays. On publiera la liste des souscripteurs.

ORIGINE DU MOT CALCULER.

Les Romains n'avaient pas l'infinitif *calculare;* ils disaient *calculos subducere,* ôter les cailloux. On sait que pour compter ils employaient soit des cailloux, soit probablement des billes de divers diamètres, de diverses couleurs, à l'instar des chapelets dont font usage les religieuses. Horace dit que dans son enfance il allait au collége portant des sachets remplis de cailloux. Il paraît qu'on ne lui ménageait pas les coups. Il appelle son maître *plagosus.* L'honnête et chaste Quintillien s'élève contre l'usage barbare de battre les élèves : *Cædi vero discentes, quamquam et receptum sit, et Chrysippus non improbet, minime velim* (lib. II, chap. IV).

Le mot *calculare* se trouve pour la première fois chez Aurelius Prudentius Clemens, poëte chrétien, né l'an 348 dans la province de Tarragone en Espagne [II^e livre de la *Couronne* (*Peristephanon*)].

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES

A DÉCERNER EN 1861

(voir t. III, p. 46)

Perfectionner en quelque point la théorie des polyèdres.

Le prix consiste en une médaille d'or de la valeur de 3000 francs.

Les Mémoires devront être rendus avant le 1er juillet 1861.

A DÉCERNER EN 1860.

« Plusieurs géomètres ont étudié le nombre des valeurs » que peut prendre une fonction déterminée de plusieurs » variables lorsqu'on y permute ces variables de toutes » les manières possibles. Il existe sur ce sujet des théo- » ries remarquables qui suffisent aux applications *de cette* » *théorie* à la démonstration de l'impossibilité de la ré- » solution par radicaux d'une équation de degré supé- » rieur à *quatre;* mais la question générale qu'il faudrait » résoudre serait la suivante :

« *Quels peuvent être les nombres des valeurs des fonc-* » *tions bien définies qui contiennent un nombre donné* » *de lettres, et comment peut-on former les fonctions* » *pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs?*

» Sans exiger des concurrents une solution complète, » qui serait sans doute bien difficile, l'Académie pour- » rait accorder le prix à l'auteur d'un Mémoire qui fe- » rait faire un progrès notable à cette théorie. »

Prix : Médaille d'une valeur de 300 francs.

Les Mémoires devront être remis avant le 1er juillet 1860, terme de rigueur (*Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, 8 février 1858, p. 301-302).

Note du Rédacteur.

Voir pour la *première* question *Nouvelles Annales*, t. II, p. 163, 486; t. VI, p. 480; t. VIII, p. 68, 132, 306; t. XIII, p. 299. *Journal de l'École Polytechnique*, CAUCHY, cahier XVI, p. 75, 1813; POINSOT, cahier X. *Savants étrangers*, t. II, POINSOT. *Compte rendu*, 11 janvier 1853, p. 65, POINSOT; BERTRAND, p. 79.

Pour la *seconde* question voir *Nouvelles Annales*,

t. XIV, p. 403, 408; Serret, *Algèbre supérieure*, leçons XI^e, XIX^e, XX^e; les travaux de Ruffini sont le point de départ (*voir* la liste de ces travaux dans la *Biographie* Michaud, article *Ruffini*, t. XXXIX, p. 278); Abel, *Œuvres complètes*; Luther, *Journal* de Crelle; Betti, *Annales* de Tortolini.

BIBLIOGRAPHIE.

Annali di Matematica purà ed applicata, pubblicati da *Barnaba Tortolini*, professore di calculo sublime all'università di Roma; e compilati da *E. Betti* a Pisa, *F. Brioschi* a Pavia, *A. Genocchi* a Torino, *B. Tortolini* a Roma. (In continuazione agli *Annali di Scienze matematiche e fisiche.*) N° 1 (genn. et febbr. 1858). Roma, con tipi della S. C. de Propaganda Fide. In-4 de 56 pages; tome I.

Ces *Annales* font suite à celles des *Scienze matematiche* qui datent de janvier 1850 et s'arrêtent à décembre 1857. Le format a changé, mais ni le rédacteur ni les collaborateurs, heureusement. La première collection avait pour but de faire connaître au dehors les travaux des savants italiens; la seconde aura en outre pour mission de faire connaître en Italie les travaux extérieurs. Les noms qu'on lit ci-dessus sont une garantie que ce double but sera complétement atteint.

CONTENU.

I. Henri Betti.— *Mémoire sur les équations algébriques à plusieurs inconnues* (p. 1 à 8).

Étant données deux équations ayant une racine commune, Abel a enseigné la manière de calculer une fonction symétrique de cette racine commune (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 81 et 272).

M. Betti donne la solution générale de cette question :

Étant données n + 1 *équations entre* n *inconnues, trouver les solutions communes.*

Soient

$$(1)\qquad f_0 = 0,\quad f_1 = 0,\quad f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$$

les $n + 1$ équations entre les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, f_0 est de degré m_0, f_1 est de degré m_1, f_2 est de degré m_2, et soient μ solutions communes à ces équations, moins à la première $f_0 = 0$, et

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} {}'\alpha_1,\quad {}'\alpha_2, \ldots,\quad {}'\alpha_n = s_1 \\ {}''\alpha_1,\quad {}''\alpha_2, \ldots,\quad {}''\alpha_n = s_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{\mu}\alpha_1,\quad {}^{\mu}\alpha_2, \ldots,\quad {}^{\mu}\alpha_n = s_\mu \end{array}\right.$$

La première seule s_1 représente une solution commune à toutes les $n + 1$ équations.

On démontre ces trois théorèmes qui servent de lemmes.

1°. *Une fonction rationnelle et symétrique de* $s_2, s_3, \ldots, s_\mu$ *équivaut à une fonction rationnelle et entière de* s_1.

De même si l'on remplace s_1 par un s quelconque.

2°. *Une fonction rationnelle et entière de degré quelconque de* s_1 *équivaut à une fonction rationnelle et entière de toutes les quantités qui entrent dans le système* (2); *cette fonction contient un seul terme de degré* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n$, *et les autres termes sont de degrés inférieurs.*

Désignons par Δ le déterminant fonctionnel

$$\sum \pm \frac{df_1}{dx_1}\,\frac{df_2}{dx_2} \cdots \frac{df_n}{dx_n}.$$

3°. *Si* F_p *indique une fonction de* $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}$ *rationnelle, entière et avec un seul terme de degré*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n,$$

et tous les autres termes de degré inférieur, et désignons par Δ_p *ce que devient le déterminant fonctionnel en y remplaçant* $x_1, x_1, \ldots, x_n$ *par* $\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_n^p$, *alors le terme de degré le plus élevé dans* F_p *sera*

$$\sum_{p=1}^{p=\mu} \frac{F_p}{\Delta_p}.$$

Ces trois théorèmes fournissent la solution du problème où il s'agit de déterminer une fonction rationnelle quelconque de s_1, seule solution commune à toutes les $n+1$ équations, et le même procédé peut s'appliquer à plusieurs solutions communes, et l'auteur énonce sans démonstration les conditions nécessaires et suffisantes pour que $n+1$ équations aient t systèmes de solutions communes.

Le travail a le cachet de profondeur particulier à ce savant géomètre; la diversité et la multiplicité des indices rendent la lecture très-pénible.

II. François Brioschi. — *Note sur le développement d'un determinant* (p. 9.-11).

Posons

$$a_{r,s} = \frac{1}{x_s - a_r}, \quad \alpha_{r,s} = \frac{1}{(x_s - a_r)^2},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \alpha_{1,1}, & a_{2,1}, & \alpha_{2,1}, \ldots, & a_{n,1}, & \alpha_{n,1} \\ a_{1,2}, & \alpha_{1,2}, & a_{2,2}, & \alpha_{2,2}, \ldots, & a_{n,2}, & \alpha_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,2n}, & \alpha_{1,2n}, & a_{2,2n}, & \alpha_{2,2n}, \ldots, & a_{n,2n}, & \alpha_{n,2n} \end{vmatrix}$$

C'est ce déterminant de $4n^2$ termes qu'on développe ainsi que $\frac{dA}{da_{r,s}}$ et $\frac{dA}{d\alpha_{r,s}}$, le tout en fonction des x et des a.

III. F. Brioschi. — *Mémoire sur les fonctions abéliennes complètes* (p. 12-17).

a_1, a_2,..., a_{2n+1} sont $2n+1$ nombres réels différents entre eux et tels, qu'on a

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{2n} < a_{2n+1}.$$

Posons

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3)(x - a_5) \ldots (x - a_{2n+1}),$$
$$Q(x) = A(x - a_2)(x - a_4)\ldots(x - a_{2n}),$$
$$R(x) = P(x)Q(x),$$

où

$$A > 0.$$

Soit

$$y = \frac{P(x)}{2(x - a_{2r-1})\sqrt{R(x)}};$$

l'aire d'une telle courbe prise entre des limites déterminées désignées par les a est une fonction abélienne ; ainsi

$$K_{r,s} = \frac{1}{2}\int_{a_{2s-1}}^{a_{2s}} \frac{P(x)}{(x - a_{2r-1})\sqrt{R(x)}}\,dx$$

est une fonction abélienne de première espèce, et

$$L_{r,s} = \frac{1}{2}\frac{Q(a_{2r-1})}{P'(a_{2r-1})}\int_{a_{2s-1}}^{a_{2s}} \frac{P(x)}{(x - a_{2r-1})^2\sqrt{R(x)}}\,dx$$

est une fonction abélienne de deuxième espèce.

Si l'on pose

$$n = 1,$$

on a les quatre fonctions elliptiques.

L'auteur cite un certain déterminant Δ dont les éléments sont des fonctions abéliennes, et il parvient au résultat curieux

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n,$$

et, pour les fonctions elliptiques,

$$\Delta = \frac{\pi}{2}.$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES; par M. *A. Stern*. Traduit de l'allemand par M. *E. Lévy*, agrégé des Sciences. Paris, 1858. In-8 de 85 pages.

En littérature, de judicieuses entraves tendent, doublent les ressorts du génie. Ainsi, au XVII^e siècle, la sévère observation des règles de la grammaire, des préceptes du goût, des lois du rhythme et de l'harmonie dans les vers, des trois unités au théâtre ont produit des chefs-d'œuvre. Nous nous sommes débarrassés de ces entraves, où sont nos chefs-d'œuvre? Il en est ainsi dans les sciences exactes. Les anciens s'étaient astreints à n'employer d'autres lignes que la droite et le cercle, d'autres instruments que la règle et le compas, et ils nous ont légué des chefs-d'œuvre : Euclide, Archimède, Apollonius. On peut rapporter à la même cause Huyghens, Newton; aux deux lignes, droite et cercle, se rattachent des idées vraies de beauté et des idées chimériques de perfection auxquelles les anciens tenaient avec une ténacité religieuse.

Toutefois ils s'apercevaient que pour des questions qui exigeaient des extractions de racines cubique et quatrième, il fallait absolument d'autres lignes, et ils eurent recours aux coniques, à la conchoïde, à la cissoïde, etc. Archimède considéra même la spirale, une de ces courbes qu'une droite coupe en une infinité de points et qu'on a nommée depuis *transcendante*, comme dépassant les limites de la géométrie ordinaire. Le célèbre problème de Kepler (*) où il s'agit d'une relation entre un arc de cercle et sa corde (ou sinus) a donné l'idée des *fonctions transcendantes circulaires*, de même que la relation entre un arc d'ellipse et sa corde a créé les transcendantes elliptiques, et beaucoup d'autres du genre analogue. Les racines des équations du deuxième, troisième et quatrième degré peuvent s'exprimer soit par des radicaux, soit par des transcendantes circulaires; mais Abel a démontré que l'équation générale du cinquième degré ne peut plus se résoudre par des combinaisons de radicaux, et M. Hermite vient de publier l'importante découverte que cette résolution peut s'obtenir par des transcendantes elliptiques. Il devient très-probable que la résolution générale des équations de degré supérieur au cinquième dépend aussi de certaines transcendantes; c'est la besogne de l'avenir, d'autant plus importante, que les applications aux sciences physiques mènent presque toujours à des équations transcendantes. La loi mathématique de l'attraction est probablement une fonction de ce genre dont nous ne connaissons que le premier terme de son développement en série décroissante. L'étude soignée des équations transcendantes est une heureuse innovation de l'enseignement actuel. En 1837, l'Académie de Copenhague a mis au concours la résolution de ces équations. Le Mémoire de M. le Dr Stern a été couronné, et nous en avons déjà rendu un compte suffisamment étendu (t. XIV, p. 384, 388).

Cette traduction claire, exacte, faite avec intelligence, comble une lacune. Les procédés de Rolle et de Newton

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 303.

deviennent insuffisants pour les équations transcendantes, et tout à fait impraticables pour les racines imaginaires. M. Stern fait emploi du théorème de Fourier, et M. Lévy a eu le bon esprit, guidé par les précieux conseils de M. Gerono, de faire précéder sa traduction d'une exposition de ce théorème, ce qui facilite singulièrement la lecture de l'ouvrage, et le fera sans doute bien accueillir par les professeurs et les élèves.

M. Mathète, professeur au lycée de Clermont, nous a envoyé un Mémoire bien travaillé, contenant un moyen de rendre plus pratique la méthode Stern et la résolution des équations numériques en général. Nous en parlerons dans les *Nouvelles Annales*.

NOTE

Ayant pour objet de signaler des erreurs nombreuses qui existent dans les Tables de Logarithmes de Callet.

Des études sur les logarithmes, entreprises individuellement et à des points de vue divers, par M. Lefort, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, et par M. Hoüel, docteur ès Sciences, les ont conduits à reconnaître de nombreuses incorrections dans des Tables de Logarithmes fort répandues, et même dans les Tables de Briggs et de Vlacq, que l'on peut appeler fondamentales, car elles ont servi de base à la plupart des Tables modernes, quand ces dernières n'en étaient pas de simples extraits. L'objet de cette Note est de signaler, aux éditeurs et aux savants, les erreurs contenues dans la dernière partie de la Table des logarithmes des nombres de Callet.

Errata de la Table des Logarithmes des nombres de 1 à 108 000. Partie à 8 décimales.

Nota. — Les erreurs portent toutes sur la 8^e décimale, qui est tantôt trop faible, tantôt trop forte.

NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
102 101	2999	3000	102 601	60	59	103 137	50	49
107	555 [1]	2	605	3	2	188	20	19
113	3	4	623	0	1	220	6	5
117	4	5	689	3	2	294	09	10
141	0	1	699	2	1	311	6	7
147	1	2	707	5	4	369	2	1
153	2	3	713	2	1	377	3	2
161	3	4	723	70	69	417	3	4
173	4	5	739	4	3	430	3	2
243	9	8	743	5	4	438	2	1
247	8	7	749	1	0	444	0	1
251	7	6	755	7	6	450	49	50
255	6	5	761	3	2	511	1	0
265	3	2	763	8	7	558	6	5
271	1	0	771	9	8	583	8	9
279	8	7	773	4	3	587	5	6
287	5	4	784	2	1	605	1	2
289	4	3	785	5	4	618	0	1
291	3	2	787	20	19	642	8	9
323	7	6	789	5	4	643	7	8
325	6	5	791	10	09	644	6	7
327	5	4	793	5	4	659	2	1
335	20	19	795	200	199	668	.	2
337	9	8	797	5	4	674	5	6
343	5	4	809	4	3	690	8	7
349	1	0	811	9	8	731	7	6
355	7	6	813	4	3	734	3	2
359	4	3	821	3	2	737	9	8
375	2	1	829	2	1	740	5	4
380	2	3	835	6	5	764	0	1
385	4	3	839	5	4	834	9	8
391	9	8	845	9	8	838	2	1
465	5	4	849	8	7	852	7	6
471	8	7	853	7	6	865	2	3
476	6	7	857	6	5	873	8	7
481	6	5	867	8	7	887	0	1
497	6	5	873	1	0	910	5	4
500	6	7	879	4	3	944	2	3
507	3	2	887	1	0	949	1	2
513	5	4	927	2	1	979	3	4
518	2	3	939	5	4	996	3	4
521	4	3	969	49	50	999	.	6
529	3	2	973	6	7	104 070	6	5
531	20	19	977	3	4	093	2	3
533	7	6	991	8	7	098	8	9
565	9	8	103 000	3	2	103	4	5
567	6	5	008	5	6	179	9	8
569	3	2	018		1	197	1	2
577	5000	4999	028	.	7	202	6	5
585	7	6	029	9	8	228	1	0
591	7	6	128	59	60	316	2	3

[Suite.]

NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
104 329	5	4	105 294	3	2	105 946	7	6
333	69	70	296	8	7	956	6	5
337	4	5	308	7	6	964	5	4
346	0	1	313	9	8	965	5	4
384	3	4	318	1	0	985	1	0
385	09	10	324	5	4	989	80	79
506	2	3	327	2	1	993	9	8
531	0	1	344	1	0	106 013	3	2
547	7	8	352	9	8	016	2	1
552	5	4	373	5	4	024	9	8
569	6	5	381	1	2	034	5	4
579	9	8	432	5	4	041	2	1
583	09	10	442	4	3	065	09	10
587	0	1	456	30	29	069	8	7
606	59	60	466	8	7	076	4	3
612	0	1	475	4	3	086	8	7
629	8	7	481	3	4	094	3	2
698	8	9	482	5	6	117	7	6
708	7	6	501	7	8	141	8	7
744	6	5	524	4	5	147	3	2
759	5	4	533	9	8	155	6	5
791	9	8	535	2	1	165	7	6
803	2	1	537	5	4	166	6	5
808	4	3	539	8	7	203	9	8
811	7	6	541	1	0	204	8	7
841	6	5	543	4	3	214	7	6
855	5	4	545	7	6	222	8	7
876	2	1	547	90	89	228	1	0
888	1	0	579	5	4	248	7	6
889	5	4	582	9	8	252	2	1
915	9	8	585	3	2	259	3	2
916	3	2	595	6	5	269	60	59
917	7	6	611	6	5	272	6	5
928	40	39	621	8	7	275	2	1
943	7	8	680	1	0	283	1	0
949	1	0	681	2	1	293	7	6
959	9	8	682	3	2	328	5	4
963	4	3	683	4	3	353	5	4
971	4	3	702	1	0	372	3	2
105 024	5	6	715	2	1	383	4	3
026	2	3	729	3	2	388	5	4
028	09	10	733	6	5	398	7	6
034	1	0	737	9	8	404	6	5
057	500	499	762	6	5	411	3	2
065	7	6	782	8	7	420	6	5
074	6	7	784	9	8	433	1	0
091	3	2	817	5	4	434	9	8
116	2	3	827	9	8	435	7	6
144	50	49	835	2	1	436	5	4
166	5	6	838	3	2	453	1	0
167	8	9	841	4	3	454	9	8
197	6	5	858	9	8	455	7	6
213	1	0	862	10	09	456	5	4
217	2	1	866	1	0	457	3	2
255	3	4	881	4	3	486	2	1
265	400	399	887	5	4	510	9	8
272	8	7	895	6	5	521	4	3
274	3	2	905	7	6	557	9	8

[Suite.]

NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.	NOMBRES	ERREUR.	CORRECT.
106 605	8	7	107 210	29	30	107 625	7	6
632	6	5	222	1	0	627	4	3
648	1	2	223	6	5	637	9	8
678	7	6	224	1	0	639	6	5
688	8	7	225	6	5	665	5	4
689	5	4	242	1	0	673	2	1
723	3	2	243	6	5	676	2	1
755	3	2	244	1	0	696	8	7
765	1	0	245	6	5	720	5	4
777	2	1	246	1	0	725	1	0
805	9	8	258	70	69	726	4	3
815	5	4	267	4	3	734	9	8
822	1	0	268	9	8	744	10	09
852	5	6	274	8	7	787	9	8
886	3	2	275	3	2	797	8	7
896	6	5	280	7	6	805	1	0
904	5	6	295	9	8	811	8	7
929	0	1	299	8	7	826	50	49
945	9	8	303	7	6	838	3	2
961	6	5	310	20	19	866	8	7
962	2	1	323	1	0	871	1	0
107 015	5	6	326	5	4	876	4	3
021	1	0	334	2	1	883	2	1
022	7	6	339	5	4	892	5	4
026	30	29	351	10	09	894	30	29
039	5	4	381	5	4	896	5	4
042	2	1	433	1	0	898	40	39
064	7	6	459	80	79	900	5	4
072	2	1	466	9	8	902	50	49
077	20	19	476	50	49	904	5	4
084	8	9	521	30	29	906	60	59
091	8	7	531	9	8	908	5	4
093	9	8	545	3	2	917	7	6
109	7	6	550	2	1	932	3	2
125	4	3	555	1	0	937	5	4
130	1	0	560	80	79	943	9	8
138	4	3	564	5	4	946	6	5
141	69	70	568	10	09	956	9	8
160	1	0	575	6	5	963	5	4
176	5	4	585	3	2	967	4	3
181	1	0	588	4	3	976	4	3
186	7	6	594	6	5	986	6	5
192	8	7	614	8	7	992	9	8
209	4	5	623	10	09			

Les erreurs de Callet sont supérieures à une demi-unité et moindres qu'une unité du huitième ordre décimal.

Le tableau a été formé en collationnant la Table de Callet sur le manuscrit des grandes Tables du Cadastre qui est déposé à la bibliothèque de l'Observatoire Impérial de Paris.

Toutes les fautes signalées ci-dessus se trouvent dans la belle édition des Tables de Vega, donnée à Leipzig par le Dr Hülsse sous le titre *Sammlung mathematischer Tafeln*. En outre, dans cette partie de la Table qui a été copiée sur Callet, il y a une erreur de plus que dans l'édition française. On lit log 103 705=0157997 [6]; Callet donne 0157 9970, et ce dernier logarithme est exact.

Toutes les fautes du *Sammlung*, y compris la dernière, existent également dans le *Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch* publié à Leipzig par le Dr Köhler.

F. Lefort. — J. Houël.

5 avril 1858.

SOLUTION DU PROBLÈME

Etant donnés neuf points d'une surface du second degré, reconnaître géométriquement si un dixième point est intérieur ou extérieur à la surface ou sur la surface;

D'après M. DE JONQUIÈRES.

(*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, février 1858.)

I. Théorèmes et problèmes *connus*, servant de *Lemmes*. Voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 24, 90, 273, 358.

1°. Étant donnés cinq points d'une conique et une droite, on peut trouver les deux points d'intersection sans décrire la conique; points réels, distincts, doubles ou imaginaires.

2°. Quatre points étant donnés, on peut trouver *généralement* un cinquième point tel, qu'en dirigeant de ce point quatre droites vers les quatre points on forme un faisceau, dont le rapport anharmonique soit donné, le lieu du cinquième point est une conique passant par les quatre points donnés (*Nouvelles Annales*). Cette conique est dite *capable* du rapport anharmonique donné.

3°. Deux coniques données chacune par cinq points et ayant trois de ces points en commun, on peut construire géométriquement le quatrième point commun.

4°. Étant donnés deux systèmes de six points, chacun en involution et ayant un segment commun, connaissant les segments non communs, on peut construire *géométriquement* le segment commun.

5°. Un faisceau de quatre plans étant coupé par une droite quelconque, les quatre points d'intersection donnent un rapport *anharmonique* égal au rapport anharmonique du faisceau de plans.

6°. Trois surfaces du deuxième degré passant par huit points *quelconques*, se coupent suivant la même courbe, et une droite les coupe en six points en involution.

7°. Deux faisceaux de plans homographiques étant donnés, les plans homologues se coupent suivant des droites situées sur un hyperboloïde dont font partie les deux arêtes des faisceaux.

8°. Six points étant en involution, connaissant deux segments et un point du troisième segment, on peut déterminer le second point de ce segment.

II. Problème. *Étant donnés une génératrice rectiligne* A *et six points* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 *d'un hyperbo-*

loïde à une nappe, construire les autres génératrices rectilignes de cette surface.

Solution. 1°. Menons par la droite A et les cinq premiers points, les cinq plans A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et par a_6, les quatre droites $a_1 a_6$, $a_2 a_6$, $a_3 a_6$, $a_4 a_6$; coupons ces quatre droites par un plan quelconque P en quatre points α_1, α_2, α_3, α_4; concevons une conique C passant par ces quatre points et *capable* du rapport anharmonique, donné par les plans A_1, A_2, A_3, A_4; soit un cône $(a_6 C)$ ayant pour sommet a_6 et pour base la conique C; tous les faisceaux des plans qui passent par une arête *quelconque* de ce cône et par les quatre points α_1, α_2, α_3, α_4, donnent un rapport anharmonique égal à celui des quatre plans A_1, A_2, A_3, A_4 (*voir* ci-dessus 5°).

2°. Au plan A_4 substituons le plan A_5 et conservons les trois plans A_1, A_2, A_3 et le même plan P; on aura quatre points α_1, α_2, α_3, α_5, une conique C_1, et un cône $(f C_1)$ capable du rapport anharmonique des quatre plans A_1, A_2, A_3, A_5; les deux coniques C et C_1 ont en commun les trois points α_1, α_2, α_3, on peut donc construire le quatrième point d'intersection B (*voir* ci-dessus 3°); a_6 B est donc une arête commune aux deux cônes, donc le faisceau pentaèdre fourni par la droite A et les cinq points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 est homographique au faisceau formé par la droite a_6B et les mêmes cinq points; donc les cinq plans homologues se coupent suivant des droites passant par les cinq points et situés sur un hyperboloïde dont font partie les arêtes A et a_6B (*voir* ci-dessus 7°); comme le plan P est arbitraire, on peut obtenir une infinité d'éléments rectilignes. C. Q. F. T.

III. PROBLÈME. *Étant donnés un élément rectiligne* A *et six points* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *d'un hyperboloïde à une nappe, trouver les deux points d'intersection de l'hyperboloïde avec une droite donnée.*

Solution. Par la droite donnée, on mène un plan quelconque, on détermine d'après le problème précédent cinq génératrices rectilignes de l'hyperboloïde ; les intersections de ces génératrices avec le plan donnent cinq points qui déterminent une conique, et sans la décrire on trouve les intersections avec la droite donnée (*voir* ci-dessus 1°).

C. Q. F. T.

IV. PROBLÈME. *Étant donnés neuf points* $a_1, a_2, \ldots, a_9$ *d'une surface du second degré* S *et une droite* a_1O *menée par l'un* a_1 *de ces points, construire le deuxième point d'intersection* b_1 *de cette droite avec la surface.*

Solution. Concevons l'hyperboloïde à une nappe H qui passe par la droite $a_2\,a_9$ et par les six points a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 et un second hyperboloïde K qui passe par la droite $a_3\,a_9$ et par les six points a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 ; les trois surfaces S, H, K, ont en commun les huit points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 ; donc une droite quelconque les rencontre en six points en involution (*voir* ci-dessus 6°) ; la droite a_1O coupe donc les surfaces H, K, S, en six points h, h_1, K, K_1, a_1, b_1 en involution par le problème précédent, on trouve les quatre points h, h_1, K, K_1 ; le point a_1 est donné, on peut donc construire le point b_1 (*voir* ci-dessus 8°).

V. *Étant donnés neuf points* $a_1, a_2, \ldots, a_9$, *d'une surface du second degré* S *et une droite quelconque* O1, *trouver les points d'intersection* λ, λ' *de cette droite avec la surface.*

Solution. Soient les quatre hyperboloïdes à une nappe déterminés

H par la droite $a_2\,a_9$ et les six points $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$;
K par la droite $a_3\,a_9$ et les six points $a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$;
H′ par la droite $a_4\,a_9$ et les six points $a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8$;
K′ par la droite $a_5\,a_9$ et les six points $a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8$;

la droite Ol coupe les trois surfaces H, K, S, qui ont huit points communs en six points en involution. Soient mm', nn', $\lambda\lambda'$ les trois segments; pour la même raison, la droite Ol coupe les trois surfaces H′, K′, S en six points en involution; soient pp', qq', $\lambda\lambda'$ les trois segments; dans ces deux systèmes, les segments mm', nn', pp', qq' sont connus d'après le problème III et le troisième segment étant commun aux deux systèmes, on peut le construire (*voir* ci-dessus 4°); donc les points λ et λ' sont déterminés.

C. Q. F. T.

VI. Problème. *O étant un point quelconque de l'espace, construire : 1° la conique d'intersection de la surface* S *(problème* V*) avec le plan mené par les droites* Oa_1, Oa_2; *2° la polaire du point* O *relativement à cette conique.*

Solution. On détermine les intersections a'_1, a'_2, des droites Oa_1, Oa_2, avec la surface (problème IV) et les intersections λ, λ' d'une droite quelconque Ol, située dans le plan de la conique, avec la surface S (problème V); on connaît donc six points, a_1, a_2, a'_1, a'_2, λ, λ_1 de la conique que nous désignons par Σ; sur la droite $Oa_1a'_1$ on prend le point α tel, que les deux segments $O\alpha$, $a_1a'_1$, donnent un rapport harmonique; on prend de même un point β sur la droite $Oa_2a'_2$ tel, que les segments $O\beta$, $a_2a'_2$ donnent un rapport harmonique; la droite $\alpha\beta$ sera la polaire cherchée du point O; nous la désignons par L.

VII. Problème final. *Étant donnés neuf points* a_1, $a_2, \ldots, a_9$ *d'une surface du second degré et un dixième point quelconque* O, *reconnaître si ce point est au dedans, au dehors de la surface ou dessus.*

Solution. On détermine l'intersection de L avec Σ du problème VI (*voir* ci-dessus 1°); si les points d'intersection sont réels et distincts, le point O est en dehors de la surface ; si le point d'intersection est double, le point O est sur la surface ; si les points d'intersection sont imaginaires, le point O est dans l'intérieur de la surface S.

BIBLIOGRAPHIE.

TABLES DE LOGARITHMES A CINQ DÉCIMALES POUR LES NOMBRES ET LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES, suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles ; par *J. Hoüel*, ancien élève de l'École Normale, docteur ès Sciences. In-8. Paris, Mallet-Bachelier ; 1858, Prix : 2 francs.

La Table de logarithmes, originale et unique, calculée par Napier, donnait avec sept figures, ou, pour parler un langage plus moderne mais équivalent, faisait connaître avec sept décimales, les logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques. Briggs, qui, le premier, a compris les idées de Napier, les a propagées par l'enseignement, et s'y est associé en les développant, peut-être même en les améliorant, a publié deux Tables distinctes (*) pour les nombres et pour les lignes trigonométriques, où les valeurs de la fonction logarithmique sont exprimées par quatorze chiffres décimaux. Depuis cette époque, quelques Tables, très-restreintes comme développement, ont été calculées avec un plus grand nombre de décimales ; mais aucune, pas même celles construites au Bureau du Cadastre sous la direction de Prony, n'ont fourni, dans une étendue comparable à

(*) *Arithmetica logarithmica*. Londini, 1624 ; in-folio. — *Trigonometria Britannica*. Goudæ, 1633 ; in-folio.

celle des Tables de Briggs, une approximation équivalente.

Des considérations d'économie au point de vue typographique ont été, au moins jusqu'à la fin du siècle dernier, le principal motif qui a déterminé à réduire le nombre des décimales dans les Tables successivement extraites des œuvres originales de Briggs et de Vlacq. Gauss paraît avoir traité le premier la question scientifiquement, en vue des applications diverses que ces Tables peuvent recevoir. S'attachant particulièrement aux Tables qui ne nécessitent pas l'emploi des différences secondes pour l'interpolation, il a très-succinctement, mais très-nettement, posé les principes qui en règlent l'usage, et qui déterminent, dans chaque cas, le degré d'approximation qu'on peut espérer d'atteindre (*). Quand on a acquis la parfaite connaissance de ces principes, malheureusement trop peu répandus, on comprend très-bien la raison d'être des diverses Tables logarithmiques, où le nombre des décimales est plus ou moins restreint, et on sait en user ou s'en abstenir à propos.

L'illustre auteur de la *Theoria motus corporum cœlestium*, longtemps après la publication de cet ouvrage, a déclaré dans les *Annales de Schumacher* (**), qu'il ne faisait jamais usage des Tables de Callet, et à plus forte raison des grandes Tables de Véga, qu'il les trouvait trop développées; que les Tables de Sherwin lui avaient toujours suffi; qu'il croyait digne d'encouragement la publication de Tables à cinq ou six décimales, et qu'encore il

(*) *Theoria motus corporum cœlestium*, p. 26 et seq. Hamburgi, 1809; in-4.

(**) *Astronomische Nachrichten*, t. I[er]. — En ecrivant l'article auquel je fais allusion, Gauss semble avoir perdu de vue que, dans la *Theoria*, les logarithmes sont donnes avec sept decimales, et qu'il y fait un grand éloge des Tables trigonometriques de Taylor, construites aussi avec sept decimales.

y désirerait la suppression des parties proportionnelles. De pareilles Tables sont en effet sans danger, quand on sait bien nettement le degré d'approximation qu'elles peuvent donner, et le degré de précision que l'on veut atteindre. Elles présentent d'ailleurs d'incontestables avantages sous le rapport de la célérité et de la sûreté du calcul.

Les Tables à cinq décimales, annoncées en tête de cet article, ne satisfont qu'en partie au vœu exprimé par Gauss, puisqu'elles contiennent les parties proportionnelles; mais le grand géomètre aurait sans doute excusé ce luxe arithmétique, en considération de la parfaite convenance des dispositions générales et de la correction des détails d'exécution. On ne pouvait pas moins attendre de l'auteur de cette publication, qui s'est déjà fait avantageusement connaître par d'intéressants travaux sur la mécanique céleste, et par la traduction de plusieurs Mémoires de M. Lejeune-Dirichlet, relatifs aux parties les plus élevées des mathématiques.

Les Tables de Lalande, qui composent le fond du nouveau recueil, ont été publiées dans l'origine sous le format in-18; elles comprenaient uniquement les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000, et les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de 0 à 45 degrés. M. Hoüel y a apporté diverses modifications que, dans son Avertissement, il énumère ainsi qu'il suit :

« 1°. L'agrandissement du format, qui, en diminuant » de beaucoup le nombre des pages à feuilleter, nous a » en outre permis diverses additions utiles ;

» 2°. La suppression des caractéristiques dans la » Table des logarithmes des nombres;

» 3°. L'introduction de Tables auxiliaires donnant les » parties proportionnelles des différences, non-seulement

» pour les logarithmes des nombres, mais encore pour » ceux des lignes trigonométriques;

» 4°. Le rétablissement, dans les Tables trigonomé» triques, des logarithmes des sécantes, que le défaut » d'espace avait fait supprimer par la plupart des au» teurs, et qui sont cependant très-commodes, en dis» pensant de l'emploi des compléments arithmétiques » dans les calculs de trigonométrie;

» 5°. La Table des logarithmes des nombres a été pro» longée jusqu'à 10800, nombre de secondes contenues » dans 3 degrés;

» 6°. En tête des diverses colonnes de cette Table, » nous avons inscrit les valeurs correspondantes des lo» garithmes des rapports du sinus et de la tangente à l'arc » exprimé en secondes, et par ce moyen cette Table peut » remplacer avantageusement, pour les trois premiers » degrés, la Table trigonométrique proprement dite;

» 7°. Pour les petits arcs, l'usage des lignes trigonomé» triques naturelles est souvent plus commode que celui » de leurs logarithmes, ceux-ci se prêtant mal à l'inter» polation. Nous donnons en conséquence, dans nos Ta» bles trigonométriques, les valeurs naturelles des sinus » et des tangentes pour les trois premiers degrés. »

Parmi les additions faites par M. Hoüel à la collection de Lalande, on remarque spécialement une Table de logarithmes d'addition et de soustraction, c'est-à-dire une Table destinée à faciliter la recherche du logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres, connus seulement par leurs logarithmes. C'est la première édition française des Tables de ce genre, qui sont aujourd'hui assez répandues en Allemagne et en Angleterre. A ce propos je suis bien aise d'avoir l'occasion de placer une critique, ne serait-ce que pour rompre la monotonie de cet article.

Personne ne sait mieux que M. Hoüel à qui appartient l'idée des logarithmes d'addition et de soustraction, qui, le premier, a indiqué la forme à donner aux Tables, et en quels termes Gauss cite Leonelli dans les quelques lignes qui précèdent ses Tables de 1812. Comment se fait-il alors que M. Hoüel écrive, dans l'Avertissement : « Les logarithmes inventés par Leonelli, et auxquels » l'illustre Gauss *a donné* son nom, » et, dans le titre comme dans l'Introduction, « Table des logarithmes d'addition et de soustraction ou *logarithmes de Gauss?* » Je crois qu'il ne faut laisser usurper le bien de personne, quand on peut le défendre, et qu'on doit exercer une vigilance plus scrupuleuse encore, lorsqu'il s'agit de maintenir le bien des pauvres. Je demanderai donc à M. Hoüel, lors d'un nouveau tirage qui ne se fera sans doute pas attendre, de substituer le nom de Leonelli à celui de Gauss, dans le titre, aux pages XXII et suivantes de son Introduction, et de rectifier l'erreur de fait que tend à accréditer la rédaction amphibologique, à la page V de l'Avertissement : erreur plus dommageable en réalité à la mémoire de Gauss que la rectification ne sera profitable à la mémoire de Leonelli. Il serait injuste en effet de rendre Gauss responsable de l'usage que les Allemands ont fait de son nom dans cette circonstance. La locution *logarithmes de Gauss* a également cours en Angleterre; mais, de l'autre côté du détroit, l'érudition mathématique n'est pas en faveur, si j'en juge par la préface de certaines Tables très-estimées, où l'on décore du nom ambitieux de *méthodes* de nos contemporains, MM. James, John, William, etc., des *procédés* de calcul qui ont été donnés, les uns par Briggs, en 1624, les autres par Flower, en 1771 (*).

(*) Pourquoi dire *formules de Cardan* et pas de *Tartaglia*. TH.

Après cette petite satisfaction donnée à mon *irritation*, je me trouve plus à l'aise pour dire le bien que je pense du travail personnel de M. Hoüel, et pour en indiquer succinctement l'utilité.

On sait que les Tables des logarithmes de Leonelli fournissent une relation entre les trois fonctions A, B, C qui représentent respectivement $\log x$, $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\log(1+x)$. Dans les Tables calculées primitivement par Gauss, d'après les idées de Leonelli, puis étendues par Matthiessen, la quantité A est prise pour argument, et on trouve en regard les valeurs correspondantes de B et de C. Plus tard, Zech a établi deux Tables séparées, l'une pour l'addition, l'autre pour la soustraction : la première a pour argument A et donne la valeur de B; la seconde a pour argument B et donne la valeur de C. Cette séparation, typographiquement nécessaire pour des Tables à double entrée, comme celles de Zech, était motivée d'une manière générale par la différence d'étendue que chacune des fonctions doit occuper dans l'échelle numérique, et par la simplication qu'elle amène dans le calcul des parties proportionnelles. Ces dernières considérations suffisaient pour déterminer M. Hoüel à adopter la séparation, encore bien que ses Tables dussent être à simple entrée ; mais il a encore amélioré la disposition de Zech, en prenant le nombre C pour argument de la seconde Table, dont il a pu ainsi diminuer l'étendue, sans restreindre le degré d'approximation qu'elle doit fournir.

Les Tables d'addition et de soustraction servent non-seulement à résoudre, plus rapidement que par tous autres procédés, le problème : Étant donnés $\log m$ et $\log n$, trouver $\log(m \pm n)$; elles donnent en outre une solution plus approchée que celles que l'on pourrait déduire de ces autres procédés, si on les mettait en œuvre à l'aide de Tables vulgaires qui ne comprendraient pas plus de chiffres décimaux que les Tables spéciales. M. Hoüel a donc accompli une œuvre utile en cherchant à faire fructifier, en France, une idée qui, après y avoir germé il y a plus d'un demi-siècle, a été étouffée sous le jugement trop précipité de Delambre.

Les Tables à cinq décimales de M. Hoüel peuvent fournir, avec cinq figures exactes, le logarithme d'un nombre ou le nombre d'un logarithme, et faire connaître, à 5 secondes près, un arc donné par le logarithme de son sinus. Ainsi elles suffisent largement aux besoins des ingénieurs civils et militaires, des architectes, des arpenteurs-géomètres, etc., dont les travaux reposent sur des opérations et sur des formules, qui sont loin, en général, de présenter un pareil degré d'approximation. A plus forte raison peuvent-elles suffire aux nécessités de l'instruction publique, car les élèves trouveront, dans les diverses parties qui les composent, le moyen d'approfondir et d'appliquer tous les principes qui leur sont enseignés. Sous ce dernier rapport, le prix minime auquel l'ouvrage est mis en vente, n'est pas une considération à dédaigner.

Les Tables de M. Hoüel sont imprimées avec le soin et avec la correction que l'on est habitué à rencontrer dans les publications mathématiques qui émanent de la maison Mallet-Bachelier. Je regrette seulement qu'on ait adopté, pour les divisions principales, dans chaque page, des filets verticaux aussi larges que ceux de l'encadrement. Par un effet de contraste, les caractères pâlissent, et l'œil ressent quelque fatigue de la répétition et de la continuité des tons noirs. Je soumets cette réflexion à l'habile Directeur de l'imprimerie, persuadé qu'il trouvera, sans grands frais, un remède à l'inconvénient que je signale.

F. LEFORT.

Paris, le 5 juillet 1858.

BIOGRAPHIE.

BRAMER (Benjamin).

Né à Feldsberg (Hesse) en 1588, élevé dès son enfance dans la maison de son beau-frère Burgi, alors horloger du landgrave Wilhelm IV, à Cassel, et célèbre second inventeur des logarithmes. En 1603 Bramer alla avec Burgi à Prague; mais en 1611, lors de la mort de sa sœur, Bramer revint dans son pays, et en 1612 fut placé comme architecte à Marburg. On a de lui :

1. *Problema, wie aus bekannt gegebenem sinu eines grades, minuten oder secunden alle folgenden sinus aufs leichteste zu finden und der canon sinuum zu absolviren seye, zu Marburg.* 1614.

« Problème, connaissant le sinus d'un arc donné en degrés, minutes et secondes, on peut en déduire de la manière la plus facile les sinus suivants et construire une Table de sinus. »

2. *Benjamin Brameri Beschreibung eines sehr leichten perspectiv-und grundreissenden instruments auff einem stande : auff herrn Johan Faulhabers, bestellten Ingenieurs des Hey. Reichs stadt Ulm, weitere continuation seines mathematischen Kunstspiegels, geordnet. Gedrucktzu Cassel durch Johan Wessel, und zu Franckfurt bey Eberhard Kiesern, kupferstechern, zu finden im Jahr* 1630.

« Description d'un instrument très-commode pour prendre la perspective et lever des plans d'une seule station; arrangée comme continuation ultérieure du *miroir artificiel mathématique* de Jean Faulhaber, ingénieur en titre de la ville du Saint-Empire, Ulm. Imprimé à Cassel chez Jean Wessel et se trouve à Francfort chez Eberhard Kieser, graveur en cuivre. »

L'ouvrage est dédié au célèbre Faulhaber, et il dit en commençant que dans les mathématiques on rencontre beaucoup de choses cachées et merveilleuses; entre autres, de réduire la multiplication, la division, l'extraction des racines, à de simples additions, soustractions, divisions, etc., et cela au moyen de deux progressions, l'une arithmétique commençant par 0, et l'autre géométrique commençant par 1; et il donne pour exemple

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots;$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16 \ldots,$$

et il ajoute :

Aus diesem fundament hat mein lieber schwager und praeceptor Jobst Burgi, vor zwanzig und mehr jahren, eine schöne progresstabul mi tihren differenzen von 10 *zu* 10 *in* 9 *ziffern calculirt, auch zu Prag ohne bericht in anno* 1620 *drucken lassen; und ist also die invention der Burgi logarith, nicht des Neperi, soudern des gedachten (wie solches vielen vissend, und ihne auch herrn Keplerees zeignuss gibt) lange zuvor erfunden.*

« C'est sur ce principe que mon cher beau-frère et précepteur Jobst Burgi, il y a vingt ans et davantage, a calculé avec 9 chiffres une belle Table de progression avec les différences de 10 en 10 et qu'il a fait imprimer à Prague en 1620, et ainsi l'invention des logarithmes n'est pas de Neper mais de Burgi ci-mentionné (comme le savent plusieurs et comme Keppler lui en a aussi donné témoignage) qui a fait cette invention longtemps auparavant.

3. *Anhang eines berichts von M. Jobsten Burgi geometrische Triangularinstrument*; addition d'un rapport sur un instrument géométrico-triangulaire de M. Jobst Burgi; dédié à Wilhelm IV en 1648; il a calculé les sinus de deux secondes en deux secondes.

4. Apollonius Cattus oder geometrischen Wegweiser, 3 vol. in-4. Cassel, 1634-48 (*).

1°. Werden die Fundamenta der conischen sectionen, so von Apollonius Pergæus mit schweren, ab absurdo genomenen demontrationen dargethan, nunmehr aus leichten Euclidischen grunden erwiesen;

2°. Wird gewiesen eine neue leichte u. sehr bequeme weise allerhand Sonnenuhren, dieselben fallen se seltzam sie wollen, auf einen cylinder zu schneiden und auf zu reissen;

3°. Anhang eines berichts von M. Jobsten Burgi geom. triangular-instrument, zu jur leicht, kaizen doch gewissen land und feldmessen, wie auch andere hôhen, Tieffen, Langen und Breiten zu eremessen dienlich. C'est une nouvelle édition. Cassel, 1684.

5. Etliche geometriche quæstiones, so bishero nicht üblich gewesen, 4. Marburg, 1618.

6. Geometricher Wegeweiser, 4. Marburg, 1646.

7. Kurze Berichtigung eines Schreg oder Winkel instruments darmit alle aus und eingebogenen Schregen abzunehmen. Marburg, 1615.

8. Trigonometria planorum mecanica oder unterricht und beschreibung eines neuen geom. instruments zu allerhand abmessung u. salvirung der plancochen triangel, 4. Marburg, 1617.

(*) Apollonius Hessois, *Propriétés des sections coniques*.

9. Kurzer aber deutlicher bericht vom gebrauch des von Bj. Bramer erfundenen proportionnel instruments. Cassel, 1622.

10. Bericht zu Jobsten Burgi geom. triangular instrument, 4. Cassel, 1648.

11. Bericht zu seinem semicirculo, damit in allen triangeln in einer observation nit allein die drei Latera, souderen auch die drei Wenkel einer triangls zu finden. Ulm, 1651.

Bramer est mort à Ziegenhayn de 1649 à 1650.

BIBLIOGRAPHIE.

LEONHARDI EULERI OPERA MINORA COLLECTA. Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae-auspiciis Academiae imperialis Scientiarum Petropolitanæ ediderunt auctoris pronepotes Dr P. H. Fuss (*), Academiæ Petropolitanæ perpetuo a secretis, et Nicolaus Fuss, matheseos professor in gymnasio Petropolitano Lavinensi. Insunt plura inedita. Tractatus de numerorum doctrina capita XVI aliaque. Tomus prior Petropoli, typis ac impensis Academiæ imperialis Scientiarum, 1849; Imperatori augustissimo Nicolaæ primo consecratione, in-4; Prooemium XXVII; Éloge d'Euler, par Fuss, XXIX-XLIX; Index systématique, LI-LXXXVII.

En 1834, on découvrit la pierre sépulcrale d'Euler couverte d'herbes et enfoncée dans le sol d'un cimetière de Saint-Pétersbourg consacré à la Sainte Vierge de Smo-

(*) Un Fuss a épousé une petite-fille d'Euler.

lensk (*Smolenskiana*). L'Académie résolut d'élever en cet endroit un monument. Alors vint l'idée d'un second monument, plus durable, plus utile que le premier, savoir :

Editio completa omnium operum viri illius, quem Academia Petropolitana inde a prima origine quinquaginta amplius annos suum fuisse gloriatur.

« Une édition complète de tous les ouvrages de l'homme que l'Académie de Pétersbourg se glorifie d'avoir possédé, lors de sa fondation, pendant plus d'un demi-siècle. »

C'est le Dr P. A. Fuss, depuis 1826 secrétaire, qui, le 6 mars 1844, en fit la propósition à l'Académie qui, l'ayant adoptée, la transmit à M. S. d'Ouvaroff, ministre de l'instruction publique, président de l'Académie. On calcula que cette édition devait renfermer à peu près 25 volumes grand-in-4 de 80 feuilles ou 640 pages chacun ; en publiant 200 feuilles par année ou 4 feuilles par semaine, il faudrait dix années; car les Mémoires de Saint-Pétersbourg renferment plus de 500 Mémoires ; ceux de Berlin, 120; de Paris, 17; de Leipsig, 10; de Turin, 6.

Le ministre accueillit avec faveur la proposition, mais remit l'exécution à un temps plus favorable (*in tempus magis secundum*). Au bout de deux années, le temps n'étant pas devenu plus favorable, l'Académie résolut de faire l'entreprise à ses propres frais et de commencer par les *œuvres mineures* (*opera minora*) en 8 volumes in-4. Les deux premiers volumes sont publiés et traitent en général de la théorie des nombres.

Tome I. Le préambule (*procemium*), signé P. H. Fuss, décembre 1848, contient ces renseignements et la liste de soixante et un écrits inédits que M. Fuss a trouvés dans les papiers d'Euler légués à ses héritiers.

Ces écrits inédits sont rangés dans cinq catégories.

1. *Théorie des nombres.* Les carrés magiques; pro-

blèmes sur les sommes des carrés ; ces problèmes avaient besoin d'une révision faite par le savant arithmologue Tchebytchew.

2. *Géométrie.* Application du calcul différentiel aux lignes courbes. C'est sans doute le commencement de cette troisième section des *Institutiones calculi differentialis* mentionnée dans cet ouvrage (pars II, cap. II, § 282, 283, 289).

3. *Calcul des sinus.* Savant paradoxe sur la multiplication des angles.

4. *Calcul des probabilités.* Véritable estimation du sort dans le jeu. Réflexions sur une espèce singulière de loterie nommée loterie génoise (en français). C'est une réponse faite au grand Frédéric qui l'avait consulté à ce sujet.

5. *Calcul intégral.*

6. *Mécanique. Principia pro motu sanguinis per arterias determinando,* en 43 paragraphes ; les paragraphes 1 à 14 manquent.

7. *Astronomie. Astronomia practica* contient 219 paragraphes et 7 chapitres sur l'attraction des sphères, et sur les forces perturbatrices. — Nouvelles Tables astronomiques pour calculer le lieu du soleil, Berlin 1744 ; avec beaucoup de corrections grammaticales de la main de Formey. Euler, obligé d'écrire en français, langue qu'il connaissait encore peu, rédigeait ses Mémoires en latin et puis en faisait des versions, ce qui lui prenait beaucoup de temps ; dans la suite, il parvint à écrire de prime abord en français.

8. *Artillerie. Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta* (autogr. 6 pages).

9. *Physica*. Un traité de physique en allemand, écrit vers 1730 et pour lequel Euler a reçu 100 thalers de gratification; la sixième feuille manque; contient les principes généraux. — Théorie générale de la dioptrique (en français); diffère beaucoup du Mémoire inséré en 1765 dans les *Mémoires de l'Académie de Paris*; et M. Fuss dit que la publication serait encore très-intéressante. — Recherches sur la découverte des courants de la mer (en français). Il serait intéressant de comparer ce Mémoire avec la *Géographie de la mer*, par Maury, ouvrage traduit par mon fils, professeur d'hydrographie à Dunkerque. — Commencement d'une réponse à une question proposée par l'Académie de Paris en 1751 et non envoyée. Fuss dit qu'elle aurait été couronnée.

Mélanges. Dans cette précieuse réunion de documents, M. Fuss a montré autant de dévouement que de sagacité. Tous ces papiers étaient entassés sans ordre. Car en 1772 la maison d'Euler fut détruite par un incendie et tous ses manuscrits furent transportés pêle-mêle dans un autre domicile. Il y en eut aussi de perdus en entier ou en partie. — Ce préambule est suivi de l'Eloge d'Euler, par Nicolas Fuss, père du secrétaire actuel, et lu à l'Académie du 23 octobre 1783 (XXIX-XLIX). — Ensuite : Index systématique et raisonné des Mémoires arithmétiques de Leonhard Euler contenus dans les deux volumes de cette collection, par MM. V. Bouniakowsky et P. Tchebychew (*) (LII-LXXXVII).

1re *section*. Divisibilité des nombres; décomposition des nombres en facteurs; nombres premiers; théorie des résidus.

(*) P est la lettre initiale de Pafnoufty, saint russe, patron de la ville de Borrows, gouvernement de Kalouga. M. Tchebychew est né près de Borrows.

2e *section*. Décomposition des nombres en sommes de différentes formes en carrés, en nombres triangulaires, etc.

3e *section*. Analyse de Diophante; résolution d'équations indéterminées. Problèmes; les sujets sont classés d'après le nombre d'équations simultanées qu'il faut résoudre sur certaines conditions et non d'après le nombre des inconnues, distinction très-rationnelle.

11. Mémoires qui se rapportent plus ou moins directement à la théorie des nombres.

Cet index, conçu dans un esprit philosophique, offre une lecture très-instructive et facilite singulièrement les recherches. L'index donne les titres de quatre-vingt-huit Mémoires publiés antérieurement et de cinq inédits. A côté des énoncés latins, les auteurs ont mis des traductions françaises avec d'utiles développements; les Mémoires sont de 1732-1772.

Tomus posterior, in-4 de 651 pages.

Les Mémoires de 1773 à 1782 et les *Opera arithmetica* inédites.

Tractatus de numerorum doctrina capita XVI *quæ supersunt*, de 501 à 575, commence par les Notices les plus élémentaires, et chapitre XV, *de divisoribus numerorum formæ* $x^2 + 2y^2$.

ARITHMOLOGIE.

KUMMER. *Sur la loi générale de réciprocité des restes de puissance.*

C'est une extension du théorème de Legendre et de Gauss sur la loi de réciprocité pour les formes quadratiques, section 5e des *Disquisitiones*, et s'applique aux puissances λ; ce nombre λ étant premier absolu, mais ne se rencontrant pas comme facteur dans l'un des numérateurs des premiers $\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ nombres bernoulliens.

Divisons la suite *naturelle* des nombres carrés par le nombre premier p; les puissances de p donnent pour reste zéro; mais les autres carrés donnent pour reste, non tous les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, p-1$; mais certains de ces nombres qu'on nomme *résidus quadratiques*, et les autres nombres de cette suite sont nommés *résidus non quadratiques* ou simplement *non résidus*; soit, par exemple, $p = 5$; dans la suite 1, 2, 3, 4, les nombres 1 et 4 sont résidus, et 2 et 3 non résidus, car 1, 4, 9, 16, divisés par 5 ne laissent pour restes que 1 et 4. Gauss a démontré le théorème suivant qu'il nomme fondamental (*Disquisit.*, § 131, section IV.)

Soit p *un nombre premier de la forme* $4n+1$. *Si, parmi les* résidus *quadratiques de* p *se trouve un nombre premier* q, *le nombre* p *sera aussi un résidu quadratique de* q; *et si* q *est un non résidu de* p, p *est aussi un non résidu de* q.

Si p *est un nombre premier de la forme* $4n+3$ *et* $+q$ *un nombre premier résidu quadratique de* p, *alors* $-p$ *sera résidu quadratique de* q; *et si* $+q$ *est un non résidu*, $-p$ *sera un non résidu de* q.

C'est ce théorème fondamental qui constitue la loi de réciprocité des résidus et non résidus *quadratiques*; c'est cette loi que M. Kummer a étendue à des puissances quelconques, assujetties à la condition ci-dessus énoncée; sa démonstration est fondée sur la théorie des nombres complexes *effectifs* et *idéaux* (*), démonstration analogue

(*) Des éclaircissements sur les nombres *idéaux* qui ne sont pas les imaginaires ordinaires sont très-désirables, même indispensables.

à la seconde démonstration que Gauss a donnée de son théorème fondamental (*Disq.*, sect. V, § 262). Ce Mémoire extrêmement concis échappe à toute analyse. (*Bulletin* de l'Acad. de Berlin.)

V. Bouniakowsky. *Sur un problème de position relatif à la théorie des nombres.* (Bulletin physique et mathématique de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. XVI, 1857.)

1. Soit la suite naturelle des nombres impairs de 1 à $2N + 1$ écrits dans ces ordres successifs; pour fixer les idées, prenons $N = 4$.

Ordre primitif. ..	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n° 1......	8	6	4	2	1	3	5	7	9
n° 2.	7	3	2	6	8	4	1	5	9
n° 3.......	5	4	6	3	7	2	8	1	9
n° 4.......	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Le rang n° 1 se trouve déduit du premier d'après cette loi : on écrit le premier terme (1) sous le terme du milieu (5); le second terme (2) à gauche du 1; le troisième sera à droite, le quatrième à gauche, et ainsi de suite.

On déduit le rang n° 2 du rang du n° 1, d'après la même loi; le premier (8) sous le terme du milieu (1); le second terme 6 à droite; le troisième terme 4 à gauche; parvenu au quatrième rang, on retrouve l'ordre primitif.

Si dans l'ordre primitif on s'arrête à 8, il suffit de supprimer la colonne des 9; on voit même qu'en général, soit que l'ordre primitif se termine par $2N$ ou par $2N + 1$, il faut toujours former le même nombre de rangs pour revenir à l'ordre primitif

2. Soit donc la suite

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad \nu,\ldots,\quad 2N+1,$$

où ν est un nombre quelconque de cette suite ; représentons par ν_1 le quantième de la place qu'occupe ce nombre ν dans un rang quelconque, et par ν_2 le quantième dans le rang immédiatement suivant ; les places sont comptées de gauche à droite. On a cette relation

$$4\nu_1 = 4N+3-(-)_{\nu_1}(2\nu_1-1)$$

et l'auteur parvient à ce théorème final :

Le nombre minimum *de transformations qui ramène à son état primitif un agrégat composé de* $2N+1$ *ou* $2N$ *éléments, est déterminé par l'exposant* minimum μ *satisfaisant à la congruence*

$$4^{\mu}-1=4\dot{N}+1\ (^*).$$

Exemple :

$$N=4;\quad 4N+1=17;$$

on a

$$4^4-1=\dot{17}\quad \text{ou}\quad \mu=4;\quad 4^4-1=255=17.15,$$
$$N=5;\quad 4N+1=21;$$

on a

$$2^6-1=\dot{21};\quad \mu=6.$$

On trouve dans cet ingénieux travail encore d'autres considérations très-intéressantes ; par exemple, il y a le cas où l'on rencontre des colonnes formées par le même nombre qui se répète ; soit $N=8$; $2N+1=17$, le nombre 6 est le même dans la sixième colonne, comme le nombre 17 dans la dernière colonne ; on donne des règles pour trouver ces sortes de nombres.

(*) Le point leibnitzien indique un multiple ; l'auteur se sert de la notation usuelle.

BIBLIOGRAPHIE.

TRATTATO DEL MODO BREVISSIMO DI TROVARE LA RADICE QUADRA DELLI NUMERI, et Regole d'approssimarsi di continuo al vero nelle radici de' numeri non quadrati, con le cause et inventioni loro, et anco il modo di pigliarne la radice cuba, applicando il tutto alle operationi militari, et altre di *Pietro Antonio Cataldi*, lectore delle scienze matematiche nello studio di Bologna; all' illustrissimo signore et padrone colendissimo Fra Ludovico Mariscotti, conte et cavalliero Hierosolimitano gentilhuomo di camera del serenissimo sig. duca di Savoia, et stipendiato della sacre Maesta del Re Catolico. In Bologna, apresso Bartolomeo Cochi. MDCXIII. Con licenza de' superiori. In-folio de 140 pages; titre, dédicace et poëme 2 pages.

A la dernière page (140), l'auteur s'adresse au lecteur et sollicite son indulgence pour le peu d'ordre et même de clarté qui règne dans l'ouvrage auquel, tourmenté par des douleurs physiques et morales, il n'a pu travailler qu'à bâtons rompus et par fragments. Les dernières lignes annoncent que le manuscrit a été livré à l'imprimerie le lundi 11 août 1597 à 21 heures un quart (9 heures un quart du matin) (*).

La vignette du titre porte le blason des Mariscot avec la devise *Loyalemant sans douter;* le portrait en taille-

(*) Cataldi, né à Bologne, mort le 11 février 1628. Professeur de mathématiques et d'astronomie à l'université de Bologne depuis 1584 jusqu'à 1614. A publié plus de trente ouvrages.

douce du chevalier de Malte, alors âgé de trente-cinq ans, précède la dédicace (*).

Dans les douze premières pages, on lit une méthode *abrégée*, très-péniblement exposée, de l'extraction de la racine carrée et d'autres racines; on trouve chiffre par chiffre, mais des opérations *mentales* facilitent les soustractions, les divisions et les élévations aux carrés. L'auteur sépare les tranches, allant de droite à gauche, en mettant un point sous le premier chiffre, un autre point sous le troisième, le cinquième, etc.

La page 12 a pour titre :

Discorso intorno al modo di pigliare, à trovare la radice quadra prossima delli numeri non quadrati, formando il rotto, che sia più del dovere, et della approssimasione continua.

Procédés et raisonnements très-justes, mais portant toujours sur des exemples numériques. Ils sont obscurs et pénibles à suivre : transcrits algébriquement, tout se ramène à ce qui suit :

Soit N un nombre entier non carré; posons

$$N = a^2 + b,$$

où a^2 est le plus grand carré contenu dans N; on a les identités

$$\begin{aligned} N = a^2 + b &= \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = a_1^2 - b_1 \\ &= \left(a_1 - \frac{b_1}{2a_1}\right)^2 - \frac{b_1^2}{4a_1^2} = a_2^2 - b_2 \\ &= \left(a_2 - \frac{b_2}{2a_2}\right)^2 - \frac{b_2^2}{4a_2^2}, \ldots, \end{aligned}$$

(*) Le célèbre général du Génie Marescot, mort en 1831, prétendait descendre de cette famille des Mariscotti qui a produit plusieurs hommes distingués dès le XIII^e siècle.

où

$$a_1 = a + \frac{b}{2a}, \quad b_1 = \frac{b^2}{4a^2}, \quad a_2 = a_1 - \frac{b_1}{2a_1}, \quad b_2 = \frac{b_1^2}{4a_1^2}, \ldots$$

On voit que les quantités a_1, a_2, a_3, etc., vont en diminuant et sont toujours *supérieures* à $\sqrt{\mathrm{N}}$. En effet

$$a_1^2 = a_2 + b + \frac{b^2}{4a^2},$$

$$a_2 = a_1^2 - b_1 + \frac{b_1^2}{4a_1^2} = a_2 + b + \frac{b_1^2}{4a_1^2},$$

et les expressions $\frac{b}{2a}$, $\frac{b^1}{2a_1}$, $\frac{b^2}{2a_2}$ vont aussi en diminuant. Ainsi on approche de plus en plus de la racine, toujours par excès (*più del dovere*).

L'auteur donne pour exemples

$$1^{\circ}.\ \sqrt{44}, \quad a = 6, \quad b = 8,$$

et trouve successivement

$$a_1 = 6\,\frac{2}{3}, \quad a_2 = 6\,\frac{19}{30}.$$

$$2^{\circ}.\ \sqrt{496}, \quad a_1 = 22\,\frac{3}{11}, \quad a_2 = 22\,\frac{1461}{5390}.$$

$$3^{\circ}.\ \sqrt{55}, \quad a_1 = 7\,\frac{3}{7}, \quad a_2 = 7\,\frac{303}{728}, \quad a_3 = 7\,\frac{3271713}{7860944}.$$

$$4^{\circ}.\ \sqrt{3}, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1\,\frac{3}{4}, \quad a_3 = 1\,\frac{41}{56},$$

$$a_4 = 1\,\frac{7953}{10864}, \quad a_5 = 1\,\frac{299303201}{408855776}.$$

Ce procédé algébriquement écrit devient une *série*.

2. A la page 18, on trouve ce procédé pour trouver des valeurs de plus en plus *grandes*, mais toujours inférieures (*minore del dovere*) à la vraie valeur :

$$N = a^2 + b = \left(a + \frac{b}{2a+1}\right)^2 + \frac{b}{2a+1} - \frac{b^2}{(2a+1)^2}$$

$$= a_1^2 + b_1 = \left(a_1 + \frac{b_1}{a + a_1 + 1}\right)^2$$

$$+ \frac{b_1[(a_1 + a + 1)^2 - 2a_1(a + a_1 + 1) + a_1^2 - b_1 - a_1^2]}{(a + a_1 + 1)^2}$$

$$= \left(a_1 + \frac{b_1}{a + a_1 + 1}\right)^2 + \frac{b_1[(a+1)^2 - a_1^2 - b_1]}{(a + a_1 + 1)^2} = a_2^2 + b_2.$$

Or

$$(a+1)^2 > a_1^2 + b_1 \quad \text{et} \quad a_2 > a_1, \quad a_2^2 < N,$$

et ainsi de suite.

Exemple :

$$\sqrt{44}, \quad a = 6, \quad b = 8, \quad a_1 = 6\frac{8}{13},$$

$$a_2 = 6\frac{112}{177}, \quad a_3 = 6\frac{1528}{2423}.$$

Il fait la juste remarque que, pourvu que l'on choisisse pour a_1 une valeur quelconque, mais telle que son carré soit inférieur à N, le même procédé donne pour a_2 une valeur plus approchée et toujours par défaut ; par exemple prenons

$$a_1 = 6\frac{5}{8}$$

qui remplit la condition exigée ; on trouvera

$$a_2 = 6\frac{69}{109}.$$

Soit

$$N = 20\frac{1}{2};$$

prenons

$$a_1 = 4\frac{1}{2};$$

on trouve

$$a_2 = 4\frac{10}{19}, \quad a_3 = 4\frac{191}{362}, \quad a_4 = 4\frac{1820}{3449}.$$

Chacun de ces calculs numériques occupe deux pages in-folio.

3. Autre procédé pour trouver les racines *par défaut*. Soit

$$N = a_1^2 - b_1 = \alpha_1^2 + \beta_1,$$

on a

$$\sqrt{N} - \alpha_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{N} + \alpha_1};$$

donc

$$\sqrt{N} - \alpha_1 > \frac{\beta_1}{a_1 + \alpha_1};$$

de là

$$\alpha_1 + \frac{\beta_1}{a_1 + \alpha_1} < \sqrt{N},$$

et cette valeur est plus grande que α_1 et par conséquent plus approchée.

Exemple :

$$N = 44, \quad a_1 = 6\frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = 6\frac{8}{13}, \quad \beta_1 = \frac{40}{169}, \quad \sqrt{N} < 6\frac{164}{259}.$$

4. (P. 33.) Soient

$$N = \alpha_1^2 + \beta_1 = \alpha_2^2 + \beta_2,$$

on aura

$$a_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \alpha_2} > \sqrt{N};$$

$$N = a_1^2 - b_1 = a_2^2 - b_2,$$

$$a_1 - \frac{b_1}{2a_1 + a_2} > \sqrt{N};$$

$$N = a_1^2 - b_1 = \alpha_2^2 + \beta_1,$$

$$a_1 - \frac{b_1}{a_1 + \alpha_1} < \sqrt{N}.$$

Il donne encore d'autres procédés du même genre et montre même qu'on peut toujours trouver la racine à moins de $\frac{1}{4}$ près, soit par *excès*, soit par *défaut*, et l'on voit que tous ces procédés mènent à des approximations par *séries*.

5. (P. 40.) On y lit une remarque importante qui revient à ceci :

Soit

$$N = a^2 + b,$$

a étant le plus grand carré contenu dans N; si $a + \frac{b}{2a}$ est une valeur approchée, alors $a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}$ sera une valeur plus approchée et par *défaut*.

Il le démontre ainsi. On a

$$\left(a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}\right)^2 = a^2 + b - \frac{b^2}{2a\left(2a + \cfrac{b}{2a}\right)} + \frac{b^2}{\left(2a + \cfrac{b}{2a}\right)}$$

$$= a^2 + b^2 - \frac{b^3}{2a\left(2a + \cfrac{b}{2a}\right)^2}.$$

Il prend $a = 4$, $b = 3$ et emploie deux pages in-folio pour calculer le *mancamento*, ce qu'on appelle aujourd'hui *reste* des séries. Cataldi ne manque jamais de calculer ces restes qui sont pour ainsi dire l'âme de son travail et aussi la partie la plus laborieuse.

Ensuite il remarque aussi que quand la première approximation est par *défaut*, la seconde est par *excès*.

On voit ici le germe des approximations par *fractions continues*.

6. (P. 57). Il résout le problème suivant par l'algèbre :

Per satisfare alli curiosi, et vaghi delle diversità, che intendono essa regola della cosa.

Soit

$$N = 23\frac{13}{36};$$

prenons

$$a = 4, \quad b = 7\frac{13}{36};$$

ainsi la valeur approchée est

$$4\,\frac{7\frac{13}{36}}{8}.$$

Quel nombre faut-il joindre à 8 pour que l'on ait

$$\frac{7\frac{13}{36}}{8+x} = x?$$

Résolvant cette équation, il trouve

$$x = \frac{5}{6};$$

ainsi N est un carré parfait dont la racine est $4\frac{5}{6}$. Et autres problèmes du même genre pour d'autres nombres.

7. (P. 62.) $N = a^2 + b$; il prouve que

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + 1}}$$

est une approximation par *excès*.

8. (P. 70.). Il réduit $\sqrt{18}$ en fraction continue de cette manière. La première valeur par *excès* est $4\frac{2}{8}$; donc la seconde valeur par défaut (n° 5) sera $4 + \cfrac{2}{8 + \frac{2}{8}}$; considérant $\cfrac{2}{8 + \frac{2}{8}}$ comme une fraction simple, la troisième valeur par excès sera

$$4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}}},$$

et ainsi de suite; ainsi c'est une fraction continue dont les numérateurs ne sont pas l'unité. Mais dans ce cas on peut l'écrire

$$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \ddots}}}}.$$

Ce procédé peut se généraliser. On a

$$x^2 + ax = b,$$

d'où.

$$x = \frac{b}{a+x} = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}},$$

Il pousse le calcul jusqu'à la cinquième fraction, et trouve

$$\sqrt{18} = 4\,\frac{50713000833}{209004522016}.$$

Cataldi sait apprécier l'importance de son invention, qui donne alternativement des valeurs par excès et par défaut. Il la nomme *mirabile proprietà* (p. 70).

La première approximation étant $4\frac{8}{33}$, il donne pour valeur plus approchée

$$4 + \cfrac{8}{33 + \cfrac{8}{33 + \cfrac{8}{33 + \cdots}}},$$

Il pousse les approximations si loin, qu'il obtient des nombres formés de *cinquante* chiffres.

A la page 94 commencent des applications géométriques aux triangles rectangles, aux gnomons, qui montrent géométriquement les approximations données ci-dessus par l'arithmétique.

(P. 104.) Règles pratiques pour ranger les fantassins en carrés. Au bas de la page 117, on lit la phrase finale *Laus Deo semper*; cependant l'ouvrage continue. A la page 118, on donne une méthode pour extraire la racine carrée des nombres mixtes sans réduire les entiers en fractions.

(P. 120.) Règles pour ranger les hommes en carré sur un terrain de superficie donnée (*quadra di terrano*) ayant égard aux distances réglementaires entre les compagnies et les hommes.

(P. 130 jusqu'à la fin.) Extraction de la racine cubique d'un nombre entier et ses applications.

Les calculs et les discours d'une longueur rebutante ont nui à la réputation de cet ouvrage qui renferme deux découvertes importantes : les approximations *sériaires* et les approximations par *fractions continues*. C'est M. Libri qui le premier a fait ressortir le mérite de Cataldi dans son *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (t. IV, p. 92; 1841); ouvrage où l'auteur se montre savant géomètre, érudit consommé, littérateur éminent, écrivain éloquent, zélé patriote, digne alors du noble pays qui l'a vu naître. Les nombreux écrits de Cataldi sont très-rares, même en Italie. La Bibliothèque impériale possède trois volumes. M. Ravenel, conservateur des imprimés, a bien voulu mettre à ma disposition un des volumes inscrits V.72; il renferme deux traités, celui que nous avons essayé d'analyser et encore celui-ci : *Trattato del quadratura del cerchio, etc.*, 55 pages et 5 planches; 1612. Ce sont une foule d'approximations par excès et par défaut; les dénominateurs des fractions étant des carrés, il s'en sert pour réfuter une quadrature du cercle proposée par Pellegrino Borrello, professeur de mathématiques à Reggio (duché de Modène).

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK. In zwanglosen heften; als fortzetzung des von. A. L. *Crelle* gegründeten journals, herausgegeben unter mitwirkung des Herren Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass; von C. W. Borchardt mit thätiger Beförderung hoher königlicher Preussicher Behörden. Funf und funfzigster Band. Erstes heft, Berlin, 1858, Druck und verlag von Georg Reimer. — Journal des mathématiques pures et appliquées, continuation par cahiers libres du journal fondé par A. L. CRELLE, publié par C. W Borchardt avec la collaboration de MM. Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass, et par les encouragements efficaces de la haute administration royale de Prusse, LV^{e} volume, 1er cahier. Berlin, 1858, imprimerie et librairie de Georg. Reimer.

Le premier volume a paru en 1826; ainsi, en trente-deux ans, on a publié 54 volumes; quelle activité dans la plus haute région de l'intelligence. Puisse le digne représentant de cette région, le journal du savant et lucide géomètre Liouville, obtenir aussi en France *les encouragements efficaces de la haute administration*.

CONTENU DU PREMIER CAHIER.

JACOBI. C. G. J. *Sur la substitution* $(ax^2+2bx+c)y^2 + 2(a'x^2+2b'x+c')y + a''a^2+2b''x+c''=0$, *et sur la réduction de l'intégrale abélienne de première classe à la formule normale* (*Mémoire posthume communiqué par M. F. Richelot*).

Cette même expression peut s'écrire sous cette forme

$$(ay^2+2a'y+a'')x^2+2(by^2+2b'y+b'')x$$
$$+(cy^2+2c'y+c'')=0,$$

d'où l'on déduit

$$(ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c'=\sqrt{X},$$
$$(ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b''=\sqrt{Y},$$
$$X=(a'x^2+2b'x+c')^2+(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c''),$$
$$Y=(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y-c'').$$

La différentiation donne

$$[(ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b'']dx$$
$$+[(ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c']dy=0,$$

d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0;$$

équation aux fonctions elliptiques.

Ainsi, si x et $\sqrt{X}$ sont simultanément *réels*, il en sera de même de y et $\sqrt{Y}$; et *vice versâ;* si x et $\sqrt{X}$ sont simultanément *rationnels*, il en sera de même pour y et $\sqrt{Y}$. Faisons $a'=b'=c'=0$; alors on voit que si l'on peut rendre carrée *l'une* des deux expressions

$$-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c''),$$
$$(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c''),$$

on peut aussi rendre carrée *l'autre* expression. Cela correspond à la réduction de l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')}}$$

à la forme

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c'')}},$$

que Legendre obtient par la substitution

$$y^2 = -\frac{a''x^2 + 2b''x + c''}{ax^2 + 2bx + c};$$

et que l'on déduit aussi de ci-dessus en posant

$$a' = b' = c' = 0.$$

Euler n'a considéré que le cas où X et Y sont des fonctions homologues, c'est-à dire où l'on a

$$a' = b; \quad a'' = c; \quad b'' = c';$$

c'est Lagrange qui a donné la forme générale ci-dessus dans les Mémoires de l'Académie de Turin, 1785. M. Jacobi étend ici la même méthode de substitution à l'intégrale abelienne

$$\int \frac{(fx + y)\,dx}{\sqrt{\alpha x^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x + \zeta x + \eta}},$$

de même que pour les fonctions elliptiques, Euler parvient par des voies différentes à des formes semblables, savoir, d'abord en faisant disparaître dans Y les puissances impaires, ou bien aussi le premier et le dernier terme, et déduit de là le théorème sur l'addition des fonctions elliptiques, Jacobi parvient ici de la même manière à une addition de fonctions abéliennes ainsi exprimée

$$\int \frac{(f''z^2 + g'')\,dz}{\sqrt{\alpha''z^8 + \beta''z^6 + \gamma''z^4 + \delta''z^2 + \varepsilon}} = \int \frac{(bg'f't^2)dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} - \frac{(bg' - f't'')dt'}{\sqrt{\mathrm{T}'}}$$

$$\mathrm{T} = \alpha' t^4 (t^2 - c)^2 + \beta' t^2 (t^2 - c)(at^2 - b^2) + r(at^2 - b^2);$$

changeant t en t', on obtient T'.

Il faut aussi consulter pour la parfaite intelligence de ce Mémoire, extrait des papiers de l'illustre analyste, le

Mémoire de M. Richelot, dans le tome XVI, page 224, 1837 : *De transformatione integralium abelianorum primi ordinis commentatio*, travail que Jacobi avait donné à exécuter à son célèbre élève.

A. Cayley. *Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques* (en français).

Tchebychef (Bull. de l'Académie de Saint-Pétersbourg, n° 370, t. XII). *Sur les questions de* minima *qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* (en français).

Solution de ce problème.

Étant donnée une fonction quelconque avec des paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il s'agit par un choix convenable des valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de réduire au minimum la limite des écarts de la fonction de o entre $x = -h$ et $x = h$.

Tortolini (Annali di Mat., n° 2, mars et avril 1858). *Nouvelles recherches relatives à la substitution linéaire pour la réduction des fonctions elliptiques de première espèce* (voir 36 *et* 38 *du Journal de Crelle; Plana et Richelot*).

Le but de ce Mémoire est de ramener

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

à la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{L + Mx^2 + Nx^4}},$$

sans décomposer l'équation du quatrième degré en deux facteurs réels du second.

Brioschi (François) (Annali, mai, juin). *Sur les équations du multiplicateur pour la transformation des fonctions elliptiques.*

JOURNAL DE CRELLE.

Contenu du 2e cahier, t. LV (*voir* p. 78).

S. Aronsohn (p. 97). *Théorie des fonctions homogènes du troisième degré à trois variables.*

Soient

$$x_1,\ r_2,\ r_3,\quad u_1,\ u_2,\ u_3,$$

deux systèmes de variables *primitives*;

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\quad U_1,\ U_1,\ U_3,$$

deux nouveaux systèmes de variables correspondants, entre lesquels subsistent ces relations

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3,\\ x &= \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3,\\ r_3 &= \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_1 + \gamma_1 u_1,\\ U_2 &= \alpha_2 u_2 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_2,\\ U_3 &= \alpha_3 u_3 + \beta_3 u_3 + \gamma\ u\ ,\end{aligned}\right.$$

(1) sera dite *substitution primitive*,

(2) sera dite *substitution transposée.*

Désignons le déterminant commun aux deux substitutions par

$$r = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3,$$

désignons encore par

$$f(x_1, x_2, x_3),\quad f'(x_1, r_2, x_3),$$

deux fonctions qui passent l'une dans l'autre par la substitution *primitive*.

Nous nommerons

I. *Invariant*, une combinaison Δ des coefficients de f, qui ont avec les coefficients correspondants de la fonction f' la relation

$$\Delta = r^{\lambda}\,\Delta.$$

où λ est un entier positif.

II. *Covariant*, une fonction φ des coefficients de f et des variables x_1, x_2, x_3 qui, en employant la substitution *primitive* (1), a, avec la fonction φ', formée analogiquement des coefficients et des trois variables X_1, X_2, X_3 de la fonction φ', la relation

$$\varphi'(X_1, X_2, X_3) = r^{\lambda}\,\varphi(x_1, x_2, x_3).$$

III. *Forme adjointe*, une fonction Γ des coefficients de f et des variables u_1, u_2, u_3 qui, par l'emploi de la substitution *transposée* (2), a, avec la fonction Γ' formée analogiquement avec les coefficients et les variables U_1, U_2, U_3 de la fonction f', la relation

$$\Gamma(U_1, U_2, U_3) = r^{\lambda}\,\Gamma(u_1, u_2, u_3)$$

IV. *Forme intermédiaire*, soit Θ une fonction des coefficients de f et des deux systèmes de variables x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, et Θ' une fonction formée *analogiquement*, par l'emploi des deux substitutions, avec les coefficients de f' et les variables X_1, X_2, X_3, U_1, U_2, U_3.

Si l'on a la relation

$$\Theta'(U_1, U_2, U_3;\ X_1, X_2, X_3) = r^{\lambda}\,\Theta(u_1, u_2, u_3;\ x_1, x_2, x_3),$$

alors Θ est une forme intermédiaire (*).

Les dénominations (I) et (II) ont été introduites par M. Sylvestre; la dénomination (III), par Gauss.

(*) Ces formes seront expliquées en 1859.

La quatrième classe n'a pas encore été considérée jusqu'ici. Son importance ressortira dans la suite de ce travail; elle forme le passage de (II) à (III).

Ce Mémoire, de 95 pages, renferme vingt-sept beaux théorèmes sur ces quatre classes, de la plus haute valeur analytique et même géométrique pour les lignes planes du troisième ordre. Nous essayerons de les faire connaître successivement. Le célèbre analyste s'occupe d'une théorie *générale* des fonctions *homogènes*.

CAYLEY. *Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'*UNITÉ (en français).

Soit α une racine 23^e de l'unité; M. Kummer a démontré que 47 est le produit de *onze* facteurs *complexes* qui se déduisent du suivant $\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16}$ (Journal Liouville, XII, p. 208). On sait par la théorie générale qu'il existe un certain nombre 47^{3f} qui peut se décomposer en vingt-deux facteurs complexes; quel est ce nombre? Il est naturel de rechercher si

$$(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^3$$

n'est pas décomposable en deux facteurs; car alors $47^{3.2}$ serait un produit de vingt-deux facteurs complexes; M. Cayley prouve que cette décomposition est impossible.

VORLANDER J.-J. *Ausgleichung der fehler polygonometrischer messungen*. In-8°, 55 pages. — Compensation des erreurs dans les mesures polygonométriques.

L'auteur, inspecteur du cadastre dans le cercle de Minden, outre la méthode précise des moindres carrés, indique deux autres méthodes plus courtes; dans l'une on change convenablement les angles seulement, et dans l'autre les angles et les côtés. Ouvrage très-estimé en Allemagne.

ULFERS. D. W. *Praktische Anleitung und tafeln zur berechnung von Dreiecken niederer ordnung und polygonen*, etc. — Indication pratique et Tables pour le calcul des triangles d'ordre secondaire et les polygones. Coblentz, 1854.

C'est une nouvelle édition des *Tables dc coordonnées*, publiées par l'auteur en 1833.

Ces Tables contiennent les produits de sin *a*, cos *a*, cosée *a* par les nombres 10, 20, 30,..., 90, pour la division centésimale; car dans le midi et l'ouest de l'Allemagne, on emploie des instruments géodésiques ainsi *divisés*. Ces Tables facilitent les calculs trigonométriques et dispensent de l'emploi des logarithmes.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DE SAINT-PÉTERSBOURG, 1858. STRUVE (W). (XVI, n° 383, p. 367.)

L'illustre astronome fait le récit de son voyage à Paris, du bon accueil qu'il y a reçu, et parle avec enthousiasme du grand nombre de jeunes astronomes qu'il a rencontrés en Allemagne, pépinière astronomique, espoir de la science.

GÉNÉALOGIE DES BERNOULLI.

1. Bernoulli (Jacob), né dans les Pays-Bas en 1583; quitte Anvers pour échapper aux persécutions du duc d'Albe; se retire à Francfort.

2. Jacob, petit-fils du précédent, né vers 1598; s'établit à Bâle en 1622; y meurt en 1634.

3. Nicolas, fils aîné du précédent, né en 1623; mort en 1708, négociant, membre du grand conseil de Bâle; a laissé onze enfants.

4. Jacob I, cinquième enfant du précédent, né à Bâle en 1654 décembre 27; y meurt en 1705 août 16; professeur de mathématiques à l'université de Bâle en 1687 (célèbre).

5. Jean I, dixième enfant de (3), né à Bâle en 1667 juillet 27; mort en 1748 janvier 1er; docteur en médecine, professeur de mathématiques à l'université de Groningue (1695-1705) (célèbre).

6. Nicolas I, fils du huitième enfant de (3), né en 1687; mort en 1749 novembre 25; docteur en droit, professeur de mathématiques à l'université de Padoue (1716-19), et ensuite professeur des Instituts, de la logique, à l'université de Bâle.

7. Nicolas II, fils de (5), né 1695 janvier 27 (Bâle); mort 1726 juillet 26, à Saint-Pétersbourg; docteur en droit, professeur de droit (Bâle) 1723-1725; de mathématiques à Saint-Pétersbourg.

8. Daniel I, second fils de (5), né 1700 janvier 29 (Groningue); mort 1782 mars 17 (Bâle); docteur en médecine, professeur de mathématiques, 1725-33 (Saint-Pétersbourg); anatomie, botanique, philosophie spéculative à l'université de Bâle (célèbre).

9. Jean II, le plus jeune fils de (5), né 1710 mai 18 (Bâle), mort 1790 (Bâle); docteur en droit, professeur d'éloquence (Bâle), et en 1750, professeur de mathématiques.

10. Jean III, fils du précédent, né 1744 novembre 4 (Bâle), mort 1807 juillet 13, à Kopnick, près Berlin; docteur en philosophie, licencié en droit, astronome (1767) de l'Académie de Berlin.

11. Daniel II, fils de (9), né 1751 janvier 31 (Bâle), mort 1834 octobre 21 (Bâle); docteur en médecine, professeur d'éloquence à l'université de Bâle.

12. Jacob II, fils de (9), né 1759 octobre 17 (Bâle), mort 1789 juillet 3 (Saint-Pétersbourg); noyé en se baignant dans la Néwa; professeur de mathématiques (Saint-Pétersbourg).

13. Christophe, fils de (11), né 1782 mai 15 (Bâle); professeur au Pédagogium de Halle (1802), chef d'institution à Bâle (1806-17); professeur d'histoire naturelle à l'université de Bâle depuis 1817.

14. Jean-Gustave, fils du précédent, né en 1811 (Bâle), auteur d'un *Vade-mecum* du mécanicien.

Rangés par ordre de naissance.

	NAISSANCE.	MORT.	AGE.
1	1583	....	..
2	1598	1634	36
3	1623	1708	85
4	1654	1705	51
5	1667	1748	81
6	1687	1749	62
7	1695	1726	31
8	1700	1782	82
9	1710	1790	80
10	1744	1807	73
11	1751	1834	83
12	1759	1789	30
13	1782	....	..
14	1811	....	..

Ainsi, sur les douze il y a huit octogénaires, un septuagénaire, un sexagénaire, un quinquagénaire.

Age moyen, 58 ans.

BIOGRAPHIE.

LEONELLI (ZECCHINI).

Né à Crémone en 1776; étudie l'architecture à Rome en 1792, se livre de prédilection aux mathématiques; est à Bordeaux en 1800, où il a donné pendant quelques années des leçons de mathématiques et d'architecture. De là il passe à Milan et publie dans le *Journal de la Société d'encouragement* un article sur son supplément logarithmique; va à Venise une seconde fois et s'y marie; passe à Strasbourg où il publie sa théorie d'électricité; puis à Carlsruhe au service du grand-duc de Bade; passe en Franconie, à Vienne (Autriche) et à Trieste, et finalement à Corfou, où il est nommé directeur du cabinet de physique, et y est mort le 12 octobre 1847. En 1833, il a envoyé à l'Académie des Sciences de Paris des Mémoires : sur la chute des graves; sur la trajectoire des projectiles terrestres; la cause de la cessation des oscillations du pendule; la force vive; une correction faite à la méthode de tirer les racines numériques; une expression monôme algébrique entre le diamètre et la circonférence. Les tables logarithmiques d'additions et de soustractions lui ont coûté beaucoup d'années de fatigues; il les avait confectionnées quelques années avant sa mort et allait les publier quand il tomba malade.

Dans la Correspondance de Zach (Gotha 1812, vol. XXVI, page 499), Gauss dit : *Die idee dazu hat Leonelli* *so viel ich weis zuerst angegeben; allein seine meinung war, eine solche tafel für rechnungen, mit* 14 *decimalen zu construiren.*

(Communiqué par M. Bellavitis, professeur à l'université de Padoue.)

Voici ce qu'on trouve sur Leonelli dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences :*

Leonelli (Zecchini). — *Modifications à la méthode d'extraction des racines numériques;* t. IV, p. 961; t. VII, p. 653.

— *Invention et Tables de logarithmes additionnels et déductifs;* t. XIII, p. 807.

— *Note sur la comète de mars* 1843; t. XVII, p. 179.

(Prouhet.)

BIBLIOGRAPHIE.

Le style de prospectus n'est pas une invention moderne. Voici un spécimen en vers qui remonte à l'origine de l'imprimerie.

Kalendarium Johannis de Monte Regio.

Sur le titre, orné de vases fleuris, on lit :

Aureus hic liber est : non est preciosor ulla
  Gemma kalendario : quod docet istud opus
Aureus hic numerus : lune : solisque labores
  Monstrantur facile : cunctaque signa poli :
Quotque sub hoc libro terre per longa regantur
  Tempora : quisque dies : mensis : et annus erit.
Scitur in instanti quecunque sit hora diei
  Hunc emat astrologus, qui velit esse cito
Hoc Johannes opus regio de monte Probatum
  Composuit : tota notus in Italia.

Quod Veneta impressum fuit in tellure per illas
Inferius quorum nomina picta loco.

1476.

Bernardus pictor de Augusta
Petrus Loslein de Langencen
Erhardus Ratdolt de Augusta.

Calendrier très-rare et imprimé avec luxe. On y trouve une Table de *Venæ sectione per duodecim zodiaci signa*. On donne encore cette indication dans des almanachs royaux sous Louis XIV.

Manuel théorique et pratique de l'application de la méthode des moindres carrés au calcul des observations; par M. *Ritter* (*Élie*). Paris, 1858; in-8 de 75 pages.

Excellent opuscule, contenant une exposition claire de la théorie et des procédés commodes et instructifs pour la pratique.

Le chapitre V, consacré à la résolution des équations du premier degré en nombre plus grand que celui des inconnues, doit avoir de l'intérêt pour les professeurs des lycées.

Au chapitre VIII, on résout onze équations entre cinq inconnues, exemple emprunté à Gauss. Les résultats de M. Ritter diffèrent dès les *dizaines* de ceux de l'illustre géomètre.

La méthode des moindres carrés est extrêmement répandue en Allemagne et employée même par des arpenteurs. Nous sommes bien loin de là. Nos levés de Cadastre méritent-ils grande confiance? J'ai connu en 1812 à Mayence un vérificateur de Cadastre qui arguait de faux tous les calculs par logarithmes. Il est mort du typhus pendant le siége de cette ville.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME IV.)

Historique.

Bibliographie.

(*) Le Ier volume a paru. Les principaux observatoires du monde ont souscrit, excepte un.

Biographie.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.