NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. SALMON

Sur la théorie de deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 83-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__83_1>

SUR LA THÉORIE DE DEUX CONIQUES;

PAR M. G. SALMON.

C'est à M. Cayley que je dois beaucoup de ce qui suit.

1. Soient les équations des deux coniques

$$U_1 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 0,$$
$$U_2 = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'yz + 2e'zx + 2f'xy = 0.$$

(Pour les équations homogènes dont nous ferons usage, voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 294.)

2. *Trouver les équations des cordes d'intersection des deux coniques.*

On sait que l'équation

$$U_1 + \lambda U_2 = 0$$

représente une conique qui passe par les quatre points d'intersection de U_1 de U_2. Maintenant il s'agit de déterminer λ tel, que cette équation soit décomposable en deux facteurs linéaires. Il est évident que la détermination doit dépendre d'une équation du troisième degré. Car par quatre points A, B, C, D nous pouvons tirer trois systèmes de deux lignes droites AB, CD; AC, BD; AD, BC. La condition que U_1 soit décomposable en de tels facteurs est

$$\Delta = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2 = 0 \ (^*).$$

Nous trouverons la condition que $U_1 + U\lambda_2$ soit ainsi décomposable, en substituant pour a, $a + \lambda a'$, pour b, $b + \lambda b'$, etc., et la condition sera

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0 \ (^{**})$$

où (comme c'est évident par le théorème de Taylor)

$$\Theta = a'\frac{d\Delta}{da} + b'\frac{d\Delta}{db} + c'\frac{d\Delta}{dc} + d'\frac{d\Delta}{dd} + e'\frac{d\Delta}{de} + f'\frac{d\Delta}{df}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\Theta &= a'(bc - d^2) + b'(ca - e^2) + c'(ab - f^2)\\ &\quad + 2d'(ef - ad) + 2e'(fd - be) + 2f'(de - cf),\\ \Delta' &= a'b'c' + 2d'e'f' - a'd'^2 - b'e'^2 - c'f'^2,\\ \Theta' &= a\frac{d\Delta'}{da'} + b\frac{d\Delta'}{db'} + \ldots\end{aligned}$$

3. Les coefficients Δ, Θ, Θ', Δ' sont des *invariants* (t. XVI, p. 406); c'est-à-dire que le rapport mutuel de ces quantités ne change pas quand on transforme les équations U_1, U_2 en prenant de nouveaux axes quelconques. Car si l'équation

$$U_1 + \lambda U_2 = 0$$

représente deux lignes droites, elle ne cessera pas de les représenter quand on transforme les équations comme

---

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. I, p. 491. TM.

(**) On trouve cette équation dans l'admirable opuscule de M. Lamé sur les *méthodes* (1818); germe qui a été très-fécondé. Le principe de Harvey *omne vivum ex ovo* se vérifie partout. TM.

on voudra, parce que nulle transformation de coordonnées ne change λ. Il faut donc, quand on cherche les valeurs de λ pour lesquelles $U_1 + \lambda U_2$ représente deux lignes droites, que l'on trouve toujours les mêmes valeurs de λ quels que soient les axes; d'où il suit que l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0$$

a toujours les mêmes racines, quelles que soient les formes de U_1 et U_2, d'où nous avons déduit les fonctions Δ, Θ, Θ', Δ'.

4. Pour faire voir l'usage que l'on peut tirer de ce principe, nous chercherons la condition (due à M. Cayley et d'ailleurs très-difficile à trouver) pour qu'un triangle soit inscrit à la conique U_1 et circonscrit à U_2 (*).

Si cela est possible et si nous appelons x, y, z les équations des côtés d'un tel triangle, il sera possible d'écrire U_1, U_2 sous les formes

$$U_1 = 2(xy + yz + zx) = 0,$$
$$U_2 = l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 - 2lmxy - 2mnyz - 2nlzx = 0.$$

(*Voir* t. XVI, p. 307 et 308.)

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2,\\
\Theta &= -(l + m + n)^2,\\
\Theta' &= 4lmn(l + m + n),\\
\Delta' &= -4l^2m^2n^2,
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\Theta'^2 = 4\Theta\Delta'.$$

Mais parce que Θ, Θ', Δ' sont des invariants, cette relation subsiste toujours quels que soient les axes (n° 3).

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 421. TM.

Ainsi la condition cherchée est

$$\begin{bmatrix} a(b'c' - d'^2) + b(c^2a' - e'^2) + c(a'b' - f'^2) \\ + 2d(e'f' - a'd') + 2e(f'd' - b'e') \\ + 2f(d'e' - c'f') \end{bmatrix}^2$$

$$= 4(a'b'c' + 2d'e'f' - a'd'^2 - b'e'^2 - c'f'^2)$$

$$\times [a'(bc - d^2) + b'(ca - e^2) + \ldots].$$

5. *Trouver la condition pour que les coniques* U_1, U_2 *se touchent.*

Nous avons dit que par quatre points A, B, C, D on peut faire passer trois systèmes de deux droites AB, CD; AC, BD; AD, BC. Mais si les points A, B coïncident, deux de ces systèmes aussi deviendront identiques, savoir: AC, BD; AD, BC. Dans ce cas donc, il faut que l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0$$

ait deux racines égales. La condition est

$$\Theta^2\Theta'^2 + 18\Delta\Delta'\Theta\Theta' = 3\Delta^2\Delta'^2 + 4\Delta\Theta'^3 + 4\Delta'\Theta^3.$$

6. Si l'équation

$$U_2 = 0$$

représente deux droites, on aura

$$\Delta' = 0,$$

et l'on voit que la condition pour que l'une ou l'autre de ces droites touche U_1 est

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta',$$

c'est aussi la condition pour que l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' = 0$$

ait deux racines égales.

7. Si U_2 est un carré parfait $(lx + my + nz)^2$, on

trouve que dans ce cas on aura

$$\Delta' = 0, \quad \Theta' = 0.$$

Le quadrilatère ABCD se change en un triangle dont deux côtés sont les tangentes aux points d'intersection de la droite $lx + my + nz = 0$ et de la conique $U_1 = 0$.

Déterminons λ par l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta = 0;$$

nous trouvons que l'équation de ces tangentes est

$$\Theta U_1 - \Delta(lx + my + nz)^2 = 0 \text{ (*)}.$$

Mais si $\Theta = 0$, cette équation est réduite à

$$(lx + my + nz)^2 = 0,$$

d'où nous voyons que dans ce cas la droite $lx + my + nz$ touche la conique U_1. La condition donc pour que la droite $lx + my + nz$ touche U_1 est $\Theta = 0$, ou bien

$$l^2 \frac{d\Delta}{da} + m^2 \frac{d\Delta}{db} + n^2 \frac{d\Delta}{dc} + 2mn \frac{d\Delta}{dd} + 2nl \frac{d\Delta}{de} + 2lm \frac{d\Delta}{df} = 0$$

ou

$$l^2(bc - d^2) + m^2(ca - e^2) + n^2(ab - f^2) + 2mn(ef - ad)$$
$$+ 2nl(fd - be) + 2lm(de - cf) = 0 \text{ (**)}.$$

Pour abréger, nous écrirons cette condition

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Enl + 2Flm = 0.$$

8. Si ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de la polaire réciproque de la conique U_1 (prise par rapport à $x^2 + y^2 + z^2 = 0$), nous trouverons l'équation de cette po-

(*) Car l'on a $U_1 + \lambda U_2 = 0$. TM.

(**) Voir *Nouvelles Annales*, t. II, p. 108 :

$$A = \frac{dA}{da}, \quad B = \frac{dA}{db}, \ldots$$

TM.

laire réciproque en exprimant la condition que la droite $x\xi + y\eta + z\zeta$ touche U_1. L'équation est donc

$$\Sigma_1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta = 0 \text{ (*)},$$

où A, B, etc., ont la signification que nous venons d'expliquer.

9. On a les relations suivantes, savoir :

$$BC - D^2 = \Delta a, \quad CA - E^2 = \Delta b, \quad AB - F^2 = \Delta c,$$
$$EF - AD = \Delta d, \quad FD - BC = \Delta e, \quad DE - AB = \Delta f \text{ (**)},$$

d'où nous voyons que la polaire réciproque de la réciproque est ΔU_1, comme cela doit être.

10. Cherchons maintenant l'équation de la polaire réciproque de la conique $U_1 + \lambda U_2$.

Il faudra dans l'équation Σ_1 (n° 8) substituer pour a, $a + \lambda a'$, pour b, $b + \lambda b'$, etc., et on trouvera

$$\Sigma_1 + \lambda\Phi + \lambda^2 \Sigma_2 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}\Phi = & (bc' + b'c - 2dd')\xi^2 + (ca' + ac' - 2ee)\eta^2 \\ & + (ab' + ba' - 2ff')\zeta^2 + 2(ef' + e'f - ad' - a'd)\eta\xi \\ & + 2(fd' + df' - be' - b'e)\zeta\xi \\ & + 2(de' + d'e - cf' - c'f)\xi\eta.\end{aligned}$$

On obtient Σ_2 en accentuant a, b, c, etc., dans Σ_1.

11. On sait que l'équation

$$\Sigma_1 + \lambda\Phi + \lambda^2 \Sigma_2 = 0,$$

qui contient le paramètre λ, représente une courbe qui touche toujours

$$\Phi^2 = 4\Sigma_1 \Sigma_2.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales, Polaires réciproques.* Tm.
(**) Voir *Nouvelles Annales*, t. I, p. 490. Tm.

Mais parce que l'équation

$$U_1 + \lambda U_2 = 0$$

représente un système de coniques passant par quatre points, le système réciproque

$$\Sigma_1 + \lambda \Phi + \lambda^2 \Sigma_2 = 0$$

représentera un système de coniques touchant quatre droites. Il faut donc que

$$\Phi^2 = 4 \Sigma_1 \Sigma_3$$

représente ces quatre tangentes communes de Σ_1 et Σ_2. La forme de l'équation fait voir que la conique Φ passe par les points où les coniques Σ_1, Σ_2 sont touchées par les tangentes communes dont l'équation est

$$\Phi^2 = 4 \Sigma_1 \Sigma_2.$$

Nous voyons donc que les huit points où deux coniques sont touchées par leurs tangentes communes se trouvent sur une conique dont nous pouvons former l'équation.

12. On trouvera de même que la polaire réciproque de la conique

$$\Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0$$

est

$$\Delta U_1 + \lambda \mathfrak{F}_1 + \lambda^2 \Delta' U_2 = 0$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} = {} & (BC' + B'C - 2DD')\, x^2 + (CA' + AC' - 2EE')\, y^2 \\
& + (AB' + BA' - 2FF')\, x^2 \\
& + 2\,(EF' + E'F - AD' - AD)\, yz \\
& + 2\,(FD' + DF' - BE' - B'E)\, zx \\
& + 2\,(DE' + D'E - CF' - C'F)\, xy.
\end{aligned}$$

L'équation des tangentes communes de U_1 et U_2 est

$$\mathfrak{F}^2 = 4 \Delta\Delta' U_1 U_2,$$

et $\mathfrak{F}$ est la conique qui passe par les huit points où U_1 et U_2 sont touchées par ces tangentes communes.

13. Nous allons faire voir comme on pourrait parvenir à ces coniques Φ, $\mathfrak{F}$ par une autre voie. En effet, on retrouvera la conique $\mathfrak{F}$ en cherchant le lieu d'un point d'où les tangentes à U_1, U_2 forment un faisceau harmonique, et la conique Φ en cherchant l'enveloppe d'une droite qui est coupée en section harmonique par les coniques U_1, U_2 (*).

14. Problème. *Trouver la condition pour que les quatre points sur l'axe des* x *donnés par les équations*

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad a'x^2 + 2b'x + c' = 0$$

forment un système harmonique ?

Si x_1, x_2 sont les racines de la première équation et x_3, x_4 de la seconde, nous aurons

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0.$$

Mais

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad (x_1 + x_2) = \frac{2b}{a},$$

$$x_3 r_4 = \frac{c'}{a'}, \quad (x_3 + x_4) = \frac{2b'}{a'};$$

donc la condition cherchée est

$$ac' + ca' - 2bb' = 0.$$

Si, rendant les équations homogènes, on pose

$$S_1 = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

$$S_2 = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0,$$

(*) Il est evident que $\Phi = 0$, $\mathfrak{F} = 0$ sont des polaires reciproques; $\Phi = 0$ est la conique qui passe par les huit points de contact relatifs a Σ_1 et Σ_2 et $\mathfrak{F} = 0$ la conique qui passe par les huit points de contact relatifs a $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ TM nous pouvons écrire cette condition sous cette forme

$$\frac{d^2S_1}{dx^2}\frac{d^2S_2}{dy^2}-2\frac{d^2S_1}{dxdy}\frac{d^2S_2}{dxdy}+\frac{d^2S_1}{dy^2}\frac{d^2S_2}{dx^2}=0$$

ou bien symboliquement

$$\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2}-\frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right)^2 S_1 S_2 = 0.$$

15. Problème. *Trouver la condition pour que la droite*

$$lx+my+nz=0$$

soit coupée en section harmonique par les deux coniques U_1, U_2.

Afin de trouver les points où U_1 est coupée par la droite donnée, nous éliminons z entre les équations

$$U_1=0,\quad lx+my+nz=0,$$

nous obtenons une équation S_1 homogène en x et y. Nous aurons ainsi

$$\frac{dS_1}{dx}=\frac{dU_1}{dx}-\frac{l}{n}\frac{dU_1}{dz},$$

$$\frac{dS_1}{dy}=\frac{dU_1}{dy}-\frac{m}{n}\frac{dU_1}{dz};$$

semblablement

$$\frac{dS_2}{dx}=\frac{dU_2}{dx}-\frac{l}{n}\frac{dU_2}{dz},$$

$$\frac{dS_2}{dy}=\frac{dU_2}{dy}-\frac{m}{n}\frac{dU_2}{dz}.$$

Par conséquent, nous avons

$$n\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2}-\frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right)S_1 S_2$$

$$=\left[\begin{array}{l} l\left(\dfrac{d}{dy_1}\dfrac{d}{dy_2}-\dfrac{d}{dy_2}\dfrac{d}{dz_1}\right)+m\left(\dfrac{d}{dz_1}\dfrac{d}{dx_2}-\dfrac{d}{dz_2}\dfrac{d}{dx_1}\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +n\left(\dfrac{d}{dx_1}\dfrac{d}{dy_2}-\dfrac{d}{dx_2}\dfrac{d}{dy_1}\right)\end{array}\right]U_1U_2.$$

La condition donc que nous cherchons est

$$\left[\begin{array}{l} l\left(\dfrac{d}{dy_1}\dfrac{d}{dz_2}-\dfrac{d}{dy_2}\dfrac{d}{dz_1}\right)+m\left(\dfrac{d}{dz_1}\dfrac{d}{dx_2}-\dfrac{d}{dz_2}\dfrac{d}{dx_1}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +n\left(\dfrac{d}{dx_1}\dfrac{d}{dy_2}-\dfrac{d}{dx_2}\dfrac{d}{dy_1}\right)\end{array}\right]^2 U_1U_2=0$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} l^2(bc'+b'c-2dd')&+m^2(ca'+ac'-2ee')\\ &+n^2(ab'+ba'-2ff')\\ &+2mn(ef'+fe'-ad'-a'd)\\ &+2nl(fd'+f'd-be'-b'e)\\ &+2lm(de'+d'e-cf'-c'f)=0; \end{aligned}$$

et parce que l, m, n sont liés par une relation du second ordre, l'enveloppe de la droite est une conique dont l'équation est trouvée en prenant la polaire réciproque de Φ et qui est

$$\Theta'U_1+\Theta U_2-\mathfrak{F}=0.$$

16. Problème. *Trouver l'équation des deux tangentes d'un point quelconque $\alpha\beta\gamma$ à une conique U_1.*

L'équation de la droite qui joint $\alpha\beta\gamma$ à un point quelconque x', y', z' est

$$x(\beta z'-\gamma y')+y(\gamma x'-\alpha z')+z(\alpha y'-\beta x')=0,$$

et si $x'y'z'$ est un point sur l'une ou l'autre des deux tangentes, cette droite touchera U_1. On trouvera donc l'équation cherchée en formant la condition que la droite $lx+my+nz=0$ touche U_1, et puis, substituant respectivement pour l, m, n,

$$\beta z-\gamma y,\quad \gamma x-\alpha z,\quad \alpha y-\beta x,$$

ou bien, en substituant en Σ_1 (n° 8),

$$\beta z-\gamma y,\quad \gamma x-\alpha z,\quad \alpha y+\beta x,$$

pour ξ, η, ζ.

17. Soit S_1 l'équation ainsi réduite, et nous aurons

$$\frac{dS_1}{dx} = \gamma\frac{d\Sigma_1}{d\eta} - \beta\frac{d\Sigma_1}{d\zeta}, \quad \frac{dS_1}{dy} = \alpha\frac{d\Sigma_1}{d\zeta} - \gamma\frac{d\Sigma_1}{d\xi},$$

$$\frac{dS_2}{dx} = \gamma\frac{d\Sigma_2}{d\eta} - \beta\frac{d\Sigma_2}{d\zeta}, \quad \frac{dS_2}{dy} = \alpha\frac{d\Sigma_2}{d\zeta} - \gamma\frac{d\Sigma_2}{d\xi},$$

$$\gamma\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right) S_1 S_2$$

$$= \left[\begin{array}{l} \alpha\left(\dfrac{d}{d\eta_1}\dfrac{d}{d\zeta_2} - \dfrac{d}{d\eta_2}\dfrac{d}{d\zeta_1}\right) + \beta\left(\dfrac{d}{d\zeta_1}\dfrac{d}{d\xi_2} - \dfrac{d}{d\zeta_2}\dfrac{d}{d\xi_1}\right) \\ \qquad\qquad + \gamma\left(\dfrac{d}{d\xi_1}\dfrac{d}{d\eta_2} - \dfrac{d}{d\xi_2}\dfrac{d}{d\eta_1}\right) \end{array}\right]^2 \Sigma_1\Sigma_2.$$

La condition donc pour que le faisceau des tangentes du point α, β, γ soit harmonique est

$$\alpha^2(BC' + CB' - 2DD') + \ldots = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{F} = 0.$$

18. On sait qu'il y a trois points dont les polaires relativement à deux coniques sont les mêmes, et que (si ces trois polaires ont pour équations x, y, z) il est possible de donner aux équations des deux coniques les formes

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0.$$

[*Voir* mes *Conics*, p. 232 et 267 (*).]

Maintenant nous allons faire voir comment cette transformation est effectuée, et nous allons démontrer que, étant données les équations U_1, U_2 de deux coniques, les trois droites dont les pôles sont les mêmes pour les deux coniques, sont données par l'équation

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx}\left(\frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dz} - \frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dy}\right) + \frac{d\mathfrak{F}}{dy}\left(\frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dx} - \frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dz}\right)$$
$$+ \frac{d\mathfrak{F}}{dz}\left(\frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dy} - \frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dy}\right) = 0.$$

(*) Ouvrage *hors ligne*, traduit par M. Poudra. TM.

équation que nous pouvons écrire sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{d\mathfrak{F}}{dx} & \frac{d\mathfrak{F}}{dy} & \frac{d\mathfrak{F}}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

D'abord on voit aisément que cela est vrai quand les coniques U_1, U_2 ont les formes

$$U_1 = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

$$U_2 = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0.$$

Dans ce cas, on a

$$A = bc, \qquad B = ca, \qquad C = ab,$$

$$A' = b'c', \qquad B' = c'a', \qquad C' = a'b',$$

$$\mathfrak{F} = aa'(bc' + b'c)x^2 + bb'(ca' + ac')y^2 + cc'(ab' + c'b)z^2,$$

et le déterminant que nous venons d'indiquer est (à un facteur constant près)

$$xyz = 0.$$

Il faut donc démontrer que cette équation représente toujours ces mêmes droites quelle que soit la forme de U_1 et U_2.

19. Maintenant il faut observer que $\mathfrak{F}$ est un *covariant* (t. XVI, p. 406) des coniques U_1, U_2. Un covariant est un dérivé d'une équation (ou de plusieurs équations) tel, que sa relation aux équations primitives subsiste encore quand toutes les équations sont transformées par une transformation *linéaire* quelconque. Par exemple, la dé-

rivée $\frac{dU_1}{dx}$ n'est pas un covariant de U_1, parce que, quand on transforme l'équation aux nouveaux axes, le nouveau $\frac{dU_1}{dx}$ ne représente plus la même courbe. Mais parce que $\mathfrak{J}$ (la conique qui passe par les huit points de contact des tangentes communes de U_1 et U_2) est unique, il faut (quels que soient les axes) que nous trouvions une équation qui représente toujours la même courbe.

20. Ensuite nous allons démontrer que trois courbes U, V, W étant données, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} & \frac{dV}{dz} \\ \frac{dW}{dx} & \frac{dW}{dy} & \frac{dW}{dz} \end{vmatrix} \text{(*)}$$

est un *covariant* des trois courbes.

Il est bien connu que le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

est le déterminant

$$\begin{vmatrix} aA + bB + cC & aA' + bB' + cC' & aA'' + bB'' + cC'' \\ a'A + b'B + c'C & a'A' + b'B' + c'C' & a'A'' + b'B'' + c'C'' \\ a''A + b''B + c''C & a''A' + b''B' + c''C' & a''A'' + b''B'' + c''C'' \end{vmatrix}$$

(*) Quand U, V, W sont des cercles, cette derivée représente le cercle qui coupe tous les trois cercles orthogonalement.

Or si nous remplaçons x, y, z par

$$x = a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z},$$
$$y = a'\bar{x} + b'\bar{y} + c'\bar{z},$$
$$z = a''\bar{x} + b''\bar{y} + c''\bar{z},$$

nous avons

$$\frac{d}{d\bar{x}} = a\frac{d}{dx} + a'\frac{d}{dy} + a''\frac{d}{dz},$$
$$\frac{d}{d\bar{y}} = b\frac{d}{dx} + b'\frac{d}{dy} + b''\frac{d}{dz},$$
$$\frac{d}{d\bar{z}} = c\frac{d}{dx} + c'\frac{d}{dy} + c''\frac{d}{dz}\ (^*).$$

Nous voyons donc que si nous transformons linéairement U, V, W et puis formons la dérivée des équations transformées, nous aurons

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{d\bar{x}} & \frac{dU}{d\bar{y}} & \frac{dU}{d\bar{z}} \\ \frac{dV}{d\bar{x}} & \frac{dV}{d\bar{y}} & \frac{dV}{d\bar{z}} \\ \frac{dW}{d\bar{x}} & \frac{dW}{d\bar{y}} & \frac{dW}{d\bar{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} & \frac{dV}{dz} \\ \frac{dW}{dx} & \frac{dW}{dy} & \frac{dW}{dz} \end{vmatrix}$$

et quand les deux dérivées ne diffèrent que par un facteur constant, toutes les deux représentent la même courbe.

Donc

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx}\left(\frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dz_2} - \frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dy}\right) + \frac{d\mathfrak{F}}{dy}\left(\frac{dU_1}{dz}\frac{dU_2}{dx} - \frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dz}\right)$$
$$+ \frac{d\mathfrak{F}}{dz}\left(\frac{dU_1}{dx}\frac{dU_2}{dy} - \frac{dU_1}{dy}\frac{dU_2}{dx}\right) = 0$$

représente toujours la même courbe quels que soient les axes. Il était donc suffisant de démontrer qu'elle repré-

(*) Après les d il faut sous-entendre U, V, W. Tm.

sente trois droites, en nous servant des plus simples équations.

21. On peut trouver facilement par cette méthode l'équation des plans principaux d'une surface du second degré.

Soient les termes quadratiques de l'équation

$$U_1 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$

que nous voulons réduire à la forme

$$U_1 = A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2.$$

Mais il faut observer que le carré de la distance d'un point à l'origine est, pour les deux systèmes de coordonnées,

$$U_2 = x^2 + y^2 + z^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2.$$

Si les axes primitifs sont obliques, nous substituons, pour $x^2 + y^2 + z^2$,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos(y, z) + 2zx\cos(z, x)$$
$$+ 2xy\cos(x, y).$$

Formons l'expression $\mathfrak{F}$ de ces systèmes U_1, U_2, savoir :

$$\mathfrak{F} = [a(b+c) - e^2 - f^2]x^2 + [b(c+a) - f^2 - d^2]y^2$$
$$+ [c(a+b) - d^2 - e^2]z^2 + 2(ad - ef)yz$$
$$+ 2(be - fd)zx + 2(cf - de)xy \ (^*),$$

et puis le déterminant dérivé de U_1, U_2, $\mathfrak{F}$ représente l'équation cubique des trois plans principaux $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ (page 95).

22. Nous ajoutons aussi la méthode de M. Boole pour trouver en grandeur les axes d'une surface du second degré. Il ne faut que former les invariants Δ, Θ, Θ', Δ' du

---

(*) *Voir* page 89. l'on a $a' = b' = c' = 0$, $d' = e' = f' = 0$ TM système U_1, U_2. Et parce que nous avons pour l'équation transformée (page 84)

$$\Delta = ABC, \quad \Theta = AB + BC + CA, \quad \Theta' = A + B + C, \quad \Delta' = 1,$$

les quantités A, B, C (qui sont les réciproques des carrés des demi-axes) sont les racines de l'équation

$$\Delta' \lambda^3 - \Theta' \lambda^2 + \Theta \lambda - \Delta = 0$$

ou bien

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (bc - d^2 + ca - e^2 + ab - f^2)\lambda - (abc + 2\,def - ad^2 - be^2 - cf^2),$$

équation cubique qui est très-connue dans cette théorie (*).