A. CORNET

Solution de la question 458 (voir p. 434)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 463-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__463_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 458

(voir p. 434),

PAR M. A. CORNET,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

$$\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \mathrm{L}.2 \text{ quand } n \text{ dev. infini.}$$

J'effectue successivement les divisions de 1 par $n+1$, $n+2$, $n+3$,..., $2n$ et j'obtiens

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}+\ldots\pm\frac{1}{n^{p+1}}\mp\ldots,$$

$$\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{2^2}{n^3}-\frac{2^3}{n^4}+\ldots\pm\frac{2^p}{n^{p+1}}\mp\ldots,$$

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{3^2}{n^3}-\frac{3^3}{n^4}+\ldots\pm\frac{3^p}{n^{p+1}}\mp\ldots,$$

....

$$\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\frac{n}{n^2}+\frac{n^2}{n^3}-\frac{n^3}{n^4}+\ldots\pm\frac{n^p}{n^{p-1}}\mp\ldots.$$

Je dis maintenant que la somme des termes d'une colonne verticale quelconque des seconds nombres a pour limite une fraction dont le numérateur est l'unité et le dénominateur l'exposant de n au dénominateur commun à tous les termes de cette colonne verticale ; ainsi la somme de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne verticale a pour limite $\frac{1}{p+1}$ quand n augmente indéfiniment.

En effet, ces termes ont pour numérateurs les n premiers nombres entiers élevés à la puissance p ; leur dénominateur commun est n^{p+1} ; leur somme est, d'après une formule connue,

$$\sum=\frac{S_p}{n^{p+1}}$$

$$=\frac{(n+1)^{p+1}-\frac{(p+1)p}{1.2}S_{p-1}-\frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}S_{p-2}\ldots(n+1)}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Les quantités S_{p-1}, S_{p-2}, etc., sont les sommes des n premiers nombres élevés à la puissance $p-1$, $p-2$, etc. ; elles sont du degré p, $p-1$, etc., en n ; donc en divisant haut et bas par n^{p+1}, il vient

$$\sum = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} - \frac{A}{n} - \frac{A'}{n^2} - \ldots}{p+1}.$$

Quand n tend vers l'infini, on a

$$\lim \sum = \frac{1}{p+1}.$$

D'après cela, quand n tend vers l'infini, la somme de $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$, qui est égale à la somme de toutes les colonnes verticales, tend vers

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

qui est le développement de L.2. C. Q. F. D.

Note. C'est une conséquence de la question 453; en effet lorsque n est infini, les deux limites deviennent égales; et alors

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \log n,$$

formule connue $\left(\text{le terme } \frac{1}{n} \text{ a été oublié}\right)$, et aussi

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{kn} = \log kn.$$

La soustraction donne

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn} = \log k \quad (\text{pour } n = \infty).$$

[Communiqué par M. Lebesgue (*).]

(*) Le savant arithmologue fera paraître incessamment, par feuilles, des exercices sur la théorie des nombres, qui, par des échelons habilement placés, mèneront le lecteur sans fatigue du sol au faîte de l'édifice; ouvrage utile aux élèves, indispensable aux professeurs *sérieux*.