NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème général sur les courbes planes et sur les surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 441-443

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__441_1>

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES COURBES PLANES ET SUR LES SURFACES.

1. *Notations.* Sur une droite A′, prenons n points, et d'un point O pris hors de cette droite, menons n rayons à ces points. Ces rayons pris deux à deux donnent $\frac{n(n-1)}{2}$ angles; designons le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ sinus de ces angles par A'_p.

2. Théorème. *Soit donné dans un même plan ce système de* n *droites* $A', A'', \ldots, A^{(n)}$ *traversé par un second système de* n *droites* $B', B'', \ldots, B^{(n)}$; *chacune de ces* 2n *droites contient* n *points d'intersection; menons d'un point* O *des rayons aux* n^2 *points d'intersection;*

les n *points d'intersection situés sur la droite* A′ *donnent* A'_p; *sur la droite* A″, *le produit* A''_p; *posons*

$$A'_p,\ A''_p,\ A'''_p, \ldots,\ A_p^{(n)} = \alpha;$$

de sorte que α *est le produit de* $\frac{n^2(n-1)}{2}$ *sinus; désignons par* β *le produit analogue pour* β; *si* $\frac{\alpha}{\beta}$ *est un quotient constant, le lieu du point* O *est une ligne d'ordre* n *et passant par les* n^2 *points d'intersection.*

Démonstration. Soient r_1, r_2, deux rayons interceptant le segment s, et h la hauteur du triangle ayant pour côtés r_1, r_2, s; on a

$$\sin r_1,\ r_2 = \frac{hs}{r_1,\ r_2}:$$

remplaçant chaque sinus par une telle valeur, on retombe sur le théorème des *distances* (p. 368).

Observation. Faisant

$$n = 2,$$

on a la propriété vulgaire des coniques relative au rapport *projectif* de M. Poncelet; *bi-multiple* de M. Steiner; *anharmonique* de M. Chasles.

3. Soit un système de n plans A′, A″, ..., $A^{(n)}$ et un second système de n plans B′, B″, ..., $B^{(n)}$; ils se coupent suivant n^2 droites par lesquelles passent une infinité de surfaces d'ordre n (page 368); ôtons les plans A′, B′, il reste deux systèmes, chacun de $n - 1$ droites, et par les $(n-1)^2$ droites d'intersection passent une infinité de surfaces d'ordre $n - 1$. Une surface d'ordre n coupe une surface de l'ordre $n - 1$ suivant une ligne d'ordre $n(n-1)$: or ces surfaces ont en commun $(n-1)^2$ droites; donc elles ont encore en commun une ligne

d'ordre $n - 1$. Or, je dis que cette ligne est plane et que son plan passe par l'intersection des plans A', B'. En effet, soit O un point de cette ligne; le produit des n distances de ce point aux n plans $A', A'', \ldots, A^{(n)}$ divisé par le produit des distances du même point aux n plans $B', \ldots, B^{(n)}$ est un quotient constant quel que soit le point O pris sur la courbe; de même, le produit des $n - 1$ distances du point O aux $n - 1$ plans $A'', \ldots, A^{(n)}$ divisé par le produit des distances aux $n - 1$ plans $B'', B''', \ldots, B^{(n)}$; donc la distance du point O au plan A', divisée par la distance au plan B', donne un quotient constant : ainsi le lieu du point O est dans un plan passant par l'intersection de A' et B'. C. Q. F. D.

4. Si A et B représentent des droites situées dans le même plan, on obtient une propriété analogue pour les courbes planes.

5. Si les A et les B représentent des surfaces, les droites d'intersection sont remplacées par des courbes d'intersections, qui présentent encore des propriétés analogues à celles qui sont énoncées ci-dessus pour les droites.