NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MICHAEL ROBERTS

Note sur l’équation au carré des différences des racines d’une équation du degré n

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 440-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__440_0>

NOTE

Sur l'équation au carré des différences des racines d'une équation du degré n;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Posons l'équation

$$(a, b, c, d, e, \ldots,) (x, 1)^n = 0,$$

et désignons par s_0, s_1, s_2, ..., les sommes des puissances zéro, première, ..., de ses racines x_1, x_2, ..., x_n. Maintenant soit $\sum_p$ la somme de la puissance p des racines de l'équation au carré des différences des racines de l'équation donnée; je vais montrer que $\sum_p$ a pour valeur l'invariant quadratique de la forme

$$(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2p}) (x, y)^{2p}.$$

D'abord, on a

$$\sum_p = (n-1) s_{2p} - 2p \sum x_1^{2p-1} x_2 + \frac{2p(2p-1)}{1.2} \sum x_1^{2p-2} x_2^2$$
$$+ (-1)^p \frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{1\ 2.3\ldots p} \sum x_1^p x_2^p.$$

Mais

$$\sum x_1^{2p-1} x_2 = s_{2p-1} s_1 - s_{2p},$$

$$\sum x_1^{2p-2} x_2^2 = s_{2p-2} s_2 - s_{2p},$$

$$\sum x_1^p x_2^p = \frac{1}{2} (s_p^2 - s_{2p});$$

en sorte que nous tirons (en se rappelant que $n = s_0$),

$$\sum_p = s_0 s_{2p} - 2p\, s_{2p-1} s_1 + \frac{2p.(2p-1)}{1.2} s_{2p-2} s_2$$

$$+ (-1)^p \frac{(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots(p-1)} s_p^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Note.

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e, \ldots,)\ (x,\ 1)^n = ax^n + nbx^{n-}$$

$$+ \frac{n\ n-1}{2} cx^{n-2} + \frac{n.n-1.4-2\ n-3}{1\ 2.3} dx^{4-3} + \ldots;$$

$$(s_0,\ s_1,\ s_2, \ldots,\ s_{2p})\ (x,\ y)^{2p}$$

$$= s_0 x^{2p} + 2ps_1 x^{2p-1} y + \frac{2p.2p-1}{1.2} s_2 x^{2p-2} y^2.$$