NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions communiquées par M. Vannson

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 43-45
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__43_1>

QUESTIONS

COMMUNIQUÉES PAR M. VANNSON.

427. 1°. Si, dans un triangle sphérique ABC, on joint les milieux des côtés AB, AC par un arc MN, et si du point A on mène un arc AD de 90 degrés se terminant à la rencontre de MN, cet arc sera tangent au cercle qui passe par B, C, et par le point diamétralement opposé à A.

En conclure que l'angle formé par AD et AB mesure la moitié de la surface ABC (*sans calcul*).

2°. Démontrer que la relation suivante existe entre les six dièdres d'un tétraèdre quelconque : appelant S la somme des carrés des cosinus des dièdres, S_1 la somme des produits des cosinus carrés de deux dièdres opposés, S_3 la somme des quatre produits des cosinus des dièdres formant chaque angle solide, S_4 la somme des produits des cosinus des dièdres en exceptant deux dièdres opposés, on aura

$$S + 2(S_3 + S_4) = S_1 + 1.$$

Vérifier cette équation sur un tétraèdre régulier (sans trigonométrie sphérique).

Cette question figure déjà, il est vrai, dans les *Annales* (t. V, p. 375), mais on emploie la trigonométrie sphérique, ce qui est inutile. D'ailleurs les calculs ne sont pas terminés, et la relation n'est pas exprimée (*).

3°. Étant donné un point A et deux circonférences de grand cercle qui se coupent en B, mener par A un arc qui les coupe en X et Y de manière qu'on ait

$$\frac{\tang BX}{\tang BY} = \frac{\tang \alpha}{\tang 6},$$

rapport donné (géométriquement).

4°. Construire géométriquement un triangle sphérique, connaissant un côté a et les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle opposé A.

5°. Étant donné un angle sphérique inscrit dans un petit cercle, on demande si l'arc bissecteur de cet angle coupera l'arc intercepté en deux parties égales.

6°. Si deux petits cercles se coupent en A et B, et que par un des points d'intersection, B par exemple, on inscrive une sécante commune DF de longueur donnée m,

(*) Il me semble que le calcul est complètement terminé et la relation exprimée. TM.

trouver par une construction graphique le cercle circonscrit au triangle ADF.

J'ai déjà énoncé cette question dans les *Annales*, mais elle n'a pas été traitée ni indiquée parmi les problèmes non résolus.

7°. Etant donné un angle formé par deux grands cercles et un point O, mener par ce point un troisième cercle qui forme avec les deux autres un triangle sphérique de surface donnée (*Géométrie*).

8°. Si deux triangles sphériques OAB, OA'B' ont un angle au sommet commun O et même surface, si l'on joint les milieux des côtés AB, A'B', opposés à l'angle par un arc de grand cercle, il coupera l'arc qui joint B B' à 90 degrés du milieu de BB'.

9°. Si, dans un triangle sphérique, on donne un angle C compris entre deux côtés variables, mais dont la somme des tangentes est constante, le lieu de la rencontre des trois hauteurs dans chaque triangle est une circonférence de grand cercle ; si c'est la somme des côtés qu'on donne constante, le lieu sera une ellipse sphérique.

428. On donne, sur deux droites situées dans un même plan, deux points A, B : décrire deux circonférences tangentes entre elles, qui touchent respectivement les deux droites aux points A, B, et dont les rayons soient dans le rapport donné $\frac{a}{b}$. (A résoudre par la géométrie élémentaire, sans calcul.)

Cas particulier où $\frac{a}{b} = 1$.