NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TERQUEM

Solution de la question 451

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 432-433

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__432_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 451

(voir page 360);

PAR M. A. TERQUEM,
Élève au lycée Saint-Louis.

Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.

Démonstration. Soit l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

celle de l'hyperbole équilatère homofocale est

$$x^2-y^2=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

Les équations des tangentes perpendiculaires seront de la forme

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

et

$$y=-\frac{x}{m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}.$$

Je cherche l'intersection de la première tangente avec l'hyperbole; les abscisses sont données par l'équation du second degré suivante :

$$(1-m^2)x^2 \pm 2m\sqrt{a^2m^2+b^2}\,x - \frac{a^2(2m^2+1)+b^2}{2} = 0.$$

La différence des racines se trouve immédiatement

$$x'-x''=2\sqrt{\frac{2m^2(a^2m^2+b^2)+(1+m^2)[a^2(2m^2+1)+b^2]}{2(1-m^2)^2}};$$

ou, en réduisant et élevant au carré,

$$(x'-x'')^2=\frac{2(1+m^2)(a^2+b^2)}{(1-m^2)^2}.$$

La différence du carré des ordonnées s'obtient aussi immédiatement en substituant les valeurs de x' et de x'' dans l'équation de la tangente

$$y'-y''=m(x'-x'').$$

En désignant par l la longueur de la corde, on aura

$$l^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2=\frac{2(1+m^2)^2(a^2+b^2)}{(1-m^2)}.$$

Cette valeur de l^2 ne variera pas si on remplace m par $-\frac{1}{m}$; donc les deux cordes sont égales. C. Q. F. D.

Note. La longueur de la corde varie avec la fraction $\frac{1+m^2}{1-m^2}$; en remplaçant m par $\tang\alpha$, on trouve

$$\frac{1+\tang^2\alpha}{1-\tang^2\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha.$$

Le maximum est pour $2\alpha=90^\circ$ ou $\alpha=45^\circ$; la tangente est parallèle à l'asymptote; le minimum pour $2\alpha=180$, la tangente est perpendiculaire à l'axe de l'hyperbole.