

V.-A. LEBESGUE

**Sur la résolution des équations du
quatrième degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 386-390

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__386_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU QUATRIEME DEGRÉ;

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

1. Il y a bien des moyens de ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une autre équation du troisième. Le plus simple paraît le suivant.

On a identiquement

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left[x^2 + \frac{1}{2}(p + \theta) \right]^2 - \left(x\sqrt{\theta} - \frac{q}{2\sqrt{\theta}} \right)^2 \\ + r - \frac{1}{4}(p + \theta)^2 + \frac{q^2}{4\theta};$$

si donc on pose

$$r = \frac{1}{4}(p + \theta)^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{\theta},$$

ou bien

$$(1) \quad \theta^3 + 2p\theta^2 + (p^2 - 4r)\theta - q^2 = 0,$$

le polynôme $x^4 + px^2 + qx + r$ deviendra

$$\left[x^2 + x\sqrt{\theta} + \frac{1}{2}(p + \theta) - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{\theta} \right] \left[x^2 - x\sqrt{\theta} + \frac{1}{2}(p + \theta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{\theta} \right];$$

égalant chaque facteur à zéro, on trouvera les quatre racines

$$2x = \sqrt{\theta} \pm \sqrt{-2p - \theta - \frac{2q}{\sqrt{\theta}}},$$

$$2x = -\sqrt{\theta} \pm \sqrt{-2p - \theta + \frac{2q}{\sqrt{\theta}}}.$$

Comme l'équation en θ a toujours une racine réelle positive, on a les quatre racines sans ambiguïté sous forme réelle ou sous forme imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

2. On peut aussi, d'après la méthode d'Euler (*Alg.*, ch. 15), poser

$$2x = \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}.$$

Faisant disparaître les radicaux et identifiant avec l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

on trouve sans difficulté

$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= -2p, & \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3 &= p^2 - 4r, \\ \sqrt{\theta_1} \cdot \sqrt{\theta_2} \cdot \sqrt{\theta_3} &= -q,\end{aligned}$$

d'où la même réduite en θ .

Si l'on mettait $\sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}$ sous la forme

$$\sqrt{(\sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3})^2} = \sqrt{\theta_2 + \theta_3 + 2\sqrt{\theta_2} \cdot \sqrt{\theta_3}} = \sqrt{-2p - \theta_1 - \frac{2q}{\sqrt{\theta_1}}},$$

on retrouverait les formules précédentes. Les signes des radicaux dans la valeur de $2x$ sont déterminés par l'équation

$$\sqrt{\theta_1} \sqrt{\theta_2} \cdot \sqrt{\theta_3} = -q.$$

Comme on a employé l'équation

$$\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 = q^2,$$

la réduite (1) appartient à l'équation double

$$x^4 + px^2 \pm qx + r = 0.$$

L'équation

$$2x = \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3},$$

présente en effet huit valeurs, dont quatre appartiennent à l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

et les quatre autres à l'équation

$$x^4 + px^2 - qx + r = 0.$$

3. En modifiant la méthode d'Euler, on aurait pu poser

$$2x = \sqrt{m\theta_1 + n} + \sqrt{m\theta_2 + n} + \sqrt{m\theta_3 + n},$$

et déterminer m, n de manière à obtenir une réduite du

troisième degré sans second terme, qui s'est présentée à MM. Cayley (*), Hesse, Hermite, Aronhold et à d'autres peut-être.

Prenons l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

en posant

$$ax + b = y,$$

il viendra

$$(2) \quad \begin{cases} y^4 - b(b^2 - ac)y^2 + 4(2b^3 - 3abc + a^2d)y \\ - (3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e) = 0. \end{cases}$$

Soit donc

$$y = \sqrt{A\lambda_1 + B} + \sqrt{A\lambda_2 + B} + \sqrt{A\lambda_3 + B} = V_1 + V_2 + V_3,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant les trois racines de l'équation

$$\lambda^3 + Q\lambda - R = 0,$$

ce qui suppose

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = Q, \quad R = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

A et B devront être déterminés convenablement.

On a d'abord, à cause de $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $y = V_1 + V_2 + V_3$,

$$y^2 - 3B = 2(V_1V_2 + V_2V_3 + V_3V_1).$$

Carré de nouveau

$$y^4 - 6By^2 + 9B^2 = 4(V_1^2V_2^2 + V_2^2V_3^2 + V_3^2V_1^2) + 8V_1V_2V_3y;$$

or, substituant les valeurs des V^2 , on a

$$V_1^2V_2^2 + V_2^2V_3^2 + V_3^2V_1^2 = A^2Q + 3B^2;$$

donc

$$y^4 - 6By^2 - 8V_1V_2V_3y - (3B^2 + 4A^2Q) = 0.$$

(*) Arthur Cayley, avocat, né à Richmond (Surrey), le 16 août 1821.

De là, comparant cette dernière équation avec l'équation (2), on obtient

$$(2) \quad B = b^2 - ac, \quad Q = \frac{a^2(4bd - ae - 3c^2)}{4A^2};$$

on peut donc faire

$$A = a, \quad Q = \frac{4bd - ae - 3c^2}{4}.$$

Enfin

$$V_1, V_2, V_3 = \sqrt{A^3 R + A^2 BQ + B^3},$$

l'équation

$$4(2b^3 - 3abc + a^2d) = -8\sqrt{a^3 R + a^2(b^2 - ac)Q + (b^2 - ac)^3}$$

donnera

$$R = \frac{ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd}{4};$$

de là l'équation

$$4\lambda^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0;$$

c'est l'équation

$$4\theta^3 - i\theta + J = 0,$$

de MM. Hermite et Cayley ; en changeant le signe, on a l'équation

$$\Delta = 0,$$

de M. Aronhold (*). Suit la traduction d'une note mise à ce sujet par ce géomètre dans le tome LII du Journal de Crellé.

(*) Siegfried-Henri, professeur de mathématiques à l'école d'architecture de Berlin. Né à Angerburg (Prusse orientale) en 1819.