Solution de la question 287 (Bellavitis)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 354-356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__354_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 287 (BELLAVITIS)

(voir t. XIII, p. 192),

PAR UN ANONYME.

Si l'on divise d'une manière *quelconque* un polyèdre homogène en tétraèdres et si l'on suppose la masse de chaque tétraèdre réunie au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, le centre de gravité de ce système de points matériels est toujours le même.

J'appelle A_1, A_2, $A_3, \ldots$, A_n les sommets du polyèdre, (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $(a_3, b_3, c_3), \ldots$, (a_n, b_n, c_n) les coordonnées de ces points relativement à trois axes rectangulaires issus d'un point arbitraire O. Je divise la surface du polyèdre en triangles et je joins leurs sommets à un point quelconque M de l'espace, j'aurai ainsi une des décompositions exigées par la question. Considérant en particulier la pyramide triangulaire $MA_1A_2A_3$, dont le sommet M a pour coordonnées x, y, z, on a les trois équations

$$(a_1 - x)\alpha + (b_1 - y)\beta + (c_1 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_1^2 - OM^2),$$

$$(a_2 - x)\alpha + (b_2 - y)\beta + (c_2 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_2^2 - OM^2),$$

$$(a_3 - x)\alpha + (b_3 - y)\beta + (c_3 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_3^2 - OM^2),$$

pour exprimer que le point α, β, γ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre dont il s'agit. Résolvant ces équations, on en tire pour α, par exemple, une valeur

$$\alpha = \frac{N}{D},$$

dans laquelle

$$D = 2.\text{det.}\begin{Bmatrix} a_1 - x, & b_1 - y, & c_1 - z \\ a_2 - x, & b_2 - y, & c_2 - z \\ a_3 - x, & b_3 - y, & c - z \end{Bmatrix},$$

$$N = \text{dét.}\begin{Bmatrix} OA_1^2 - OM^2, & b_1 - y, & c_1 - z \\ OA_2^2 - OM^2, & b_2 - y, & c_2 - z \\ OA_3^2 - OM^2, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix}.$$

Or la quantité D est proportionnelle à la masse du tétraèdre, donc N sera à un facteur constant près le moment du point matériel considéré relativement au plan des yz. Agissant de la même manière pour chaque tétraèdre, nous aurons une somme de moments $\sum N$, qui, divisée par le volume V du polyèdre, donnera l'abscisse du centre de gravité de tous nos points. Il est manifeste que la somme $\sum N$ est constante : car

$$12V = \sum D = \sum \text{det.}\begin{Bmatrix} a_1 - x, & b_1 - y, & c_1 - z \\ a_2 - x, & b_2 - y, & c_2 - z \\ a_3 - x, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix},$$

et cette expression se réduit à

$$12V = \sum \text{det.}\begin{Bmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{Bmatrix},$$

en plaçant l'origine des coordonnées au point M. Mais en même temps il faut que la somme $\sum N$ se réduise à

$$\sum N = \sum \text{dét.} \begin{Bmatrix} OA_1^2, & b_1, & c_1 \\ OA_2^2, & b_2, & c_2 \\ OA_3^2, & b_3, & c_3 \end{Bmatrix},$$

c'est-à-dire à une quantité constante.