Géométrie. Extrait du Bulletin de la classe physique et mathématique de Saint-Pétersbourg, t. XVI, n° 561 ; 1857

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 322-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__322_0>

GÉOMÉTRIE.

Extrait du *Bulletin de la classe physique et mathématique de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, n° 561 ; 1857.

Oscar Verner. *Quelques nouveaux théorèmes sur les polygones et propositions arithmétiques et géométriques qui s'en déduisent.*

Soit un polygone fermé plan $A_1\,A_2\,A_3\ldots\,A_{n-2}\,A_{n-1}\,A_n$ et deux points M, A_0 dans ce plan; on a cette relation entre les aires triangulaires

$$\frac{MA_1A_n}{MA_0A_1 . MA_0A_n} = \frac{MA_1A_2}{MA_0A_1 . MA_0A_2} + \frac{MA_2A_3}{MA_0A_2 . MA_0A_3}$$
$$+ \frac{MA_3 . A_4}{MA_0A_3 . MA_0A_4} + \ldots + \frac{MA_{n-1}A_n}{MA_0A_{n-1} . MA_0A_n},$$

qui peut s'écrire

$$\sum_1^n \left(\frac{MA_pA_{p+1}}{MA_0A_p . MA_0A_{p+1}}\right) = 0;$$

il faut prendre 1 au lieu de $n+1$ et négativement (*voir* p. 296).

J. Mention. *Sur le cercle focal des sections coniques.*

1. Par deux points situés sur une conique, menons quatre rayons vecteurs aux foyers ; ils forment un quadrilatère non convexe, circonscriptible à un cercle : c'est le *cercle focal*, et le rayon de ce cercle est appelé le *rayon focal*. Le centre est le pôle de la corde qui réunit

les deux points de la conique. Dans la parabole, deux des rayons vecteurs deviennent des diamètres.

2. Supposons la conique rapportée à ses axes principaux. Soient α, β les coordonnées du centre du cercle focal, K le rayon focal; on a la relation

Pour l'ellipse....... $a^2K^2 = a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2$,

Pour l'hyperbole.... $a^2K^2 = a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2$,

où a est le demi-axe focal, et b l'autre demi-axe.

Dans la parabole, $K^2 = \beta^2 - 2p\alpha$, où p est le demi-paramètre.

3. La somme des deux tangentes menées par les foyers au cercle focal est égale à l'axe focal dans l'ellipse; c'est la différence dans l'hyperbole (*).

4. La longueur d'une tangente menée d'un foyer au cercle focal est à la distance du centre de ce cercle à la directrice correspondante au foyer, dans un rapport conforme au *module* de la conique.

5. L'aire d'un polygone circonscrit à la conique est égale à $a(K + K' + K'' + \ldots)$; K, K′, K″..., sont les rayons focaux relatifs aux côtés du polygone, dont quelques-uns deviennent négatifs lorsque le centre de la conique est extérieur au polygone.

6. L'aire d'un polygone inscrit à une conique est

$$ab^2\left(\frac{K}{b^2+K^2} + \frac{K'}{b^2+K'^2} + \frac{K''}{b^2+K''^2} + \ldots\right),$$

K, K′, K‴,..., sont les rayons focaux correspondants aux

(*) Lorsque les deux points se réunissent, le double point représente le cercle focal et son centre; les deux rayons vecteurs sont des tangentes à ce cercle, et ainsi la propriété de ces rayons est un cas particulier: de même pour la propriété suivante. TM.

côtés du polygone; dans la parabole, la surface du polygone circonscrit est

$$\frac{K^3 - K'^3 - K''^3 \ldots}{3p},$$

inscrit

$$\frac{2(K^3 - K'^3 - K''^3 \ldots)}{3p}.$$

7. *Secteur elliptique.* Ce secteur ayant pour sommet le centre de l'ellipse a pour aire a arc tang $\frac{K}{b}$, où K est le rayon focal correspondant à la corde qui sous-tend la base du secteur.

8. *Secteur hyperbolique.*

$$\frac{ab}{2} \log \frac{b - K}{b + K};$$

on le déduit du secteur elliptique en y remplaçant b par bi, car

$$\text{arc tang} \frac{bi}{K} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + \frac{K}{b}}{1 - \frac{K}{b}}; \quad i = \sqrt{-1}.$$

9. *Segment elliptique.*

$$\text{Aire} = ab \left(\text{arc tang} \frac{K}{b} - \frac{\frac{K}{b}}{1 + \frac{K^2}{b^2}} \right).$$

10. *Segment parabolique.*

$$\text{Aire} = \frac{2K^3}{3p}.$$

11. α, β étant les coordonnées du centre d'un cercle focal, la conique étant rapportée à des axes quelconques,

on a

$$K^2 = \frac{2F'\sin^2 v}{N + \sqrt{N^2 + m\sin^2 v}};$$

$$F' = A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha + F,$$

$$\gamma = \text{angle des axes},$$

$$N = A + C - B\cos\gamma, \quad m = B^2 - 4AC.$$

12. *Solution de ces problèmes.* Étant donnés cinq centres focaux d'une conique, trouver l'équation de la conique; quatre pour une parabole et hyperbole équilatère; trois pour un cercle: dans ce cas, c'est le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés. Au moyen du paragraphe précédent, on est amené à cinq équations du 1er degré.

12. THÉORÈME. *Si trois sections coniques passent par les mêmes quatre points, les rayons focaux des points de l'une des coniques relatifs aux deux autres sont dans un rapport constant,* ce qui comprend comme cas particulier ce théorème de la *Géométrie supérieure* :

Si trois cercles ont le même axe radical, les tangentes menées par tous les points de l'un des cercles aux deux autres sont dans un rapport constant.

L'auteur fait encore diverses applications, et annonce une prochaine publication sur la *sphère focale* d'un cône.

Note du Rédacteur. M. Tchebychew, le célèbre arithmologue dont il va être question, a pour prénom Pafnoufty (*Bulletin,* p. 63). M. Bienaymé me fait observer que ce saint est identique à saint Paphnuce qui figure dans certains calendriers à la date du 19 avril et du 11 au 24 septembre, et il y a même plusieurs saints de ce nom, tous d'Égypte; origine indiquée d'ailleurs par la forme du nom.