NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Questions proposées aux examens

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 281-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__281_1>

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

Dans le premier volume des *Nouvelles Annales* (page 151), M. Roguet a établi de *huit* manières différentes la condition de réalité des trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

L'une des méthodes suivies est fondée sur les relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique. En admettant ces relations, on peut arriver à la condition de la réalité des trois racines, par un calcul qui me semble différer assez de celui dont l'auteur a fait usage, pour que je l'indique ici.

Je suppose que le dernier terme, $+q$, de l'équation soit positif; ce qui est permis, car s'il était négatif, en changeant le signe des racines de l'équation on changerait le signe de son dernier terme, et les conditions de la réalité des trois racines resteraient, évidemment, les mêmes.

Dans ce cas, le produit des trois racines est négatif, et leur somme est nulle; donc, si les trois racines sont réelles, deux de ces racines seront positives, et la troisième négative.

Je nomme a la plus petite des deux racines positives; b la plus grande, c la racine négative : il en résulte

$$c = -(a+b),$$

et

$$ab + (a+b)c = p;$$

d'où

$$ab - (a+b)^2 = p,$$

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + ab = -p \ldots .$$

On voit que p doit être négatif.

Si dans l'égalité (2), $a^2 + b^2 + ab = -p$, on remplace b par a qui est moindre que b, on aura

$$3a^2 < -p; \quad a < \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Et, en remplaçant dans la même égalité (2) a par b, il s'ensuivra

$$3b^2 > -p; \quad b > \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Par conséquent, la racine a est comprise *seule* entre o et $\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Or, la substitution de o à x, dans $x^3 + px + q$ donne le résultat positif $+q$; donc le résultat de la substitution de $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ à x doit être négatif. Ce qui donne la condition $4p^3+27q^2<0$.

Réciproquement, si cette dernière inégalité a lieu, l'équation admettra une racine positive comprise entre o et $\sqrt{-\frac{p}{3}}$; et comme elle a nécessairement une racine négative, ses trois racines seront réelles. G.