

EMILE MATHIEU

Du produit de plusieurs nombres consécutifs

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 235-236

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__235_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DU PRODUIT DE PLUSIEURS NOMBRES CONSÉCUTIFS;

PAR M. EMILE MATHIEU.

THÉOREME. *Le produit de plusieurs nombres consécutifs*

$$(\alpha) \quad n(n+1)(n+2)\dots(n+p)$$

ne peut être une puissance parfaite, si le nombre des facteurs est $> n - 4$; autrement dit si p est $> n - 5$.

Pour le démontrer, nous nous appuyerons sur un théorème énoncé par M. Bertrand et démontré par M. Tchébichef.

Si n est un nombre entier > 7 , il y a au moins un nombre premier compris entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$.

D'après cela, il existera un nombre premier compris entre $n + p + 1$ et $\frac{n + p + 3}{2}$. Donc dans le produit (α) , il existera un facteur θ qui sera premier, si $n - 1$ est $< \frac{n + p + 3}{3}$, ou si n est $< p + 5$ ou encore si p est $> n - 5$. Or le produit (α) ne peut contenir le carré de θ , attendu que 2θ est $> n + p$; on a en effet

$$\theta > \frac{n + p + 3}{2},$$

d'où

$$2\theta > n + p + 3.$$

Le produit (α) contient le nombre premier θ , il n'est pas divisible par son carré : il ne peut donc être une puissance parfaite.

Dans cette démonstration, on suppose $n + p + 1 > 7$ ou $n + p + 1 < 7$; mais il est facile de vérifier le théorème lorsque $n + p$ est inférieur à 7; la proposition est donc démontrée.

Cela posé, il m'a été facile de vérifier que le produit de plusieurs nombres consécutifs

$$n(n+1)\dots(n+p)$$

ne peut être une puissance parfaite, toutes les fois que le nombre n n'est pas supérieur à 100.

Cette vérification se fait très-rapidement, si l'on remarque que p étant $< n - 4$, il est impossible que le produit (α) soit une puissance parfaite : 1° si l'un des facteurs de ce produit est un nombre premier, ce qui a déjà été établi par MM. Liouville et Gerono lorsque le premier facteur est 1; 2° si l'un des facteurs est divisible par un nombre premier $R > p$ sans être divisible par R^2 (*).