NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EMILE MATHIEU

Du produit de plusieurs nombres consécutifs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 235-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__235_1>

DU PRODUIT DE PLUSIEURS NOMBRES CONSÉCUTIFS;

PAR M. EMILE MATHIEU.

THÉORÈME. *Le produit de plusieurs nombres consécutifs*

$$(\alpha) \qquad n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)$$

ne peut être une puissance parfaite, si le nombre des facteurs est $> n - 4$; *autrement dit si* p *est* $> n - 5$.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur un théorème énoncé par M. Bertrand et démontré par M. Tchébichef.

Si n est un nombre entier > 7, il y a au moins un nombre premier compris entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$.

D'après cela, il existera un nombre premier compris entre $n + p + 1$ et $\frac{n+p+3}{2}$. Donc dans le produit (α), il existera un facteur θ qui sera premier, si $n - 1$ est $< \frac{n+p+3}{3}$, ou si n est $< p + 5$ ou encore si p est $> n - 5$. Or le produit (α) ne peut contenir le carré de θ, attendu que 2θ est $> n + p$; on a en effet

$$\theta > \frac{n+p+3}{2},$$

d'où

$$2\theta > n + p + 3.$$

Le produit (α) contient le nombre premier θ, il n'est pas divisible par son carré : il ne peut donc être une puissance parfaite.

Dans cette démonstration, on suppose $n+p+1>7$ ou $n+p+1<7$; mais il est facile de vérifier le théorème lorsque $n+p$ est inférieur à 7; la proposition est donc démontrée.

Cela posé, il m'a été facile de vérifier que le produit de plusieurs nombres consécutifs

$$n(n+1)\ldots(n+p)$$

ne peut être une puissance parfaite, toutes les fois que le nombre n n'est pas supérieur à 100.

Cette vérification se fait très-rapidement, si l'on remarque que p étant $<n-4$, il est impossible que le produit (α) soit une puissance parfaite : 1° si l'un des facteurs de ce produit est un nombre premier, ce qui a déjà été établi par MM. Liouville et Gerono lorsque le premier facteur est 1 ; 2° si l'un des facteurs est divisible par un nombre premier $R>p$ sans être divisible par R^2 (*).