NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RICHARD P. OXAMENDI

Solution de la question 377

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 19-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__19_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 377

(voir t. XVI, p 407);

PAR M. RICHARD P. OXAMENDI.

Soient AA_1, BB_1, CC_1, les trois perpendiculaires abais-

(*) $$\frac{\log \infty}{\infty} = 0,$$

d'où l'équation paradoxale

$$1^{\infty} = 0.$$

TM.

sés des sommets d'un triangle ABC respectivement sur les côtés opposés ; considérons le triangle $A_1B_1C_1$; soient A_2 le point où B_1C_1 coupe AA_1 ; B_2 le point où A_1C_1 coupe BB_1 ; C_2 le point où A_1B_1 coupe CC_1 ; considérons le triangle $A_2B_2C_2$; soient A_3 l'intersection de B_2C_2 avec AA_1 ; B_3 l'intersection de A_2C_2 avec BB_1, et C_3 l'intersection de A_2B_2 avec CC_1, et ainsi de suite.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

étant les équations des côtés BC, AC, AB du triangle, l'équation de A_nB_n sera

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0,$$

ou

$$m_n = \frac{m_{n-1}+2}{m_{n-1}}, \quad m_{n-1} = \frac{m_{n-2}+2}{m_{n-2}}, \ldots, \quad m_2 = \frac{m_1+2}{m_1},$$

d'où

$$m_1 = 1,$$

$$m_{2n} = \frac{2_{2n+1}+1}{2_{2n}-1} \qquad m_{2n+1} = \frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+1}+1};$$

l'équation de $A_\infty B_\infty$ est donc

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 2\gamma \cos C = 0;$$

de même pour les côtés B_nC_n, A_nC_n.

1°. La droite AA_1 bissecte l'angle $B_nA_nC_n$; de même les droites BB_1, CC_1.

2°. Toutes les droites A_nB_n passent par le même point ; de même les droites A_nC_n, B_nC_n, et ces trois points sont une même droite (*).

(E. Harrison, Bach. Arts, Trinity college Cambridge.)

L'équation de AA_1 est

$$(1) \qquad \beta \cos B - \gamma \cos C = 0,$$

(*) Voir la figure t XVI, p 408.

puisque le rapport des perpendiculaires abaissées d'un point de AA_1 sur AB et AC est égal à celui des sinus des angles BAA_1 et B_1AC; or ces angles sont complémentaires de B et C. On peut remplacer le rapport de sinus par les rapports des cosinus des angles B et C.

On peut écrire de suite les équations des deux autres hauteurs,

(2) BB_1, $\alpha \cos A - \gamma \cos C = 0$,

(3) CC_1, $\beta \cos B - \alpha \cos A = 0$.

Leur somme est nulle, ce qui donne un théorème connu.

Formons à présent l'équation de A_1B_1; cette droite passe par les points A_1 intersection de (AA_1, BC) et B_1 intersection de (AC, BB_1), son équation sera de la forme

(4) $$r\alpha + s\beta + t\gamma = 0.$$

Soient $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ les perpendiculaires abaissées des points A_1, B_1 sur les droites $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, on aura les deux équations entre ces coordonnées,

$$r\alpha' + s\beta' + t\gamma' = 0,$$
$$r\alpha'' + s\beta'' + t\gamma'' = 0.$$

Si l'on cherche les valeurs des rapports $\frac{r}{t}$, $\frac{s}{t}$, et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (4), on arrive à cette équation

(5) $$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\gamma') = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'un déterminant

(6) $$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \gamma' \\ \beta & \beta' & \gamma'' \\ \gamma & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons maintenant les valeurs de α', β', γ', α'', β'', γ'', pour les substituer dans cette équation et obtenir l'équation de A_1, B_1. On a

Pour le point A_1 $\begin{cases} \beta' \cos B - \gamma' \cos C = o, \\ \alpha' = o. \end{cases}$

Pour le point B_1 $\begin{cases} \gamma'' \cos C - \alpha'' \cos A = o, \\ \beta'' = o. \end{cases}$

Si l'on substitue les rapports $\frac{\beta'}{\gamma'}$ et $\frac{\alpha'}{\gamma''}$ dans l'équation (5), on aura

$$\alpha(+\beta'\gamma'') + \beta(+\alpha''\gamma') + \gamma(-\alpha''\beta') = o,$$

mais

$$\beta' = \gamma' \frac{\cos C}{\cos B}, \quad \alpha'' = \gamma'' \frac{\cos C}{\cos A}.$$

on a, en substituant,

$$\alpha\left(\gamma'\gamma''\frac{\cos C}{\cos B}\right) + \beta\left(\gamma'\gamma''\frac{\cos C}{\cos A}\right) + \left(-\gamma'\gamma''\frac{\cos C}{\cos B}\frac{\cos C}{\cos A}\right)\gamma = o:$$

divisant par $\gamma'\gamma''\cos C$, nous aurons

$$\frac{\alpha}{\cos B} + \frac{\beta}{\cos A} - \frac{\cos C}{\cos B \cos A}\gamma = o;$$

chassant les dénominateurs nous avons, pour l'équation de $A_1 B_1$,

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C = o.$$

Les formules étant symétriques, nous pouvons écrire sans calcul les équations des droites $B_1 C_1$ et $A_1 C_1$; ces équations sont :

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - \beta \cos B = o, \quad (A_1 C_1)$$
$$\beta \cos B + \gamma \cos C - \alpha \cos A = o. \quad (B_1 C_1)$$

Si nous voulons trouver l'équation A_2, B_2, nous substituerons la valeur de α, β, γ, qui correspond aux points A_2 et B_2 dans l'équation (5); or l'on a

$$\text{Pour le point } A_2 \left\{ \begin{array}{ll} \beta' \cos B - \gamma' \cos C = 0, & (AA_1) \\ \beta' \cos B + \gamma' \cos C - \alpha' \cos A = 0. & (B_1 C_1) \end{array} \right.$$

$$\text{Pour le point } B_2 \left\{ \begin{array}{ll} \gamma'' \cos C - \alpha'' \cos A = 0, & (BB_1) \\ \alpha'' \cos A + \gamma'' \cos C - \beta'' \cos B = 0, & (A_1 C_1) \end{array} \right.$$

Tirant de là les valeurs des rapports $\frac{\beta'}{\gamma'}$, $\frac{\alpha'}{\gamma'}$, $\frac{\alpha''}{\gamma''}$, $\frac{\beta''}{\gamma''}$, et substituant dans (5), on trouve pour l'équation de $A_2 B_2$

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 3 \gamma \cos C = 0. \quad (A_2 B_2)$$

de même les équations $B_2 C_2$ et $A_2 C_2$,

$$\beta \cos B + \gamma \cos C - 3 \alpha \cos A = 0, \quad (B_2 C_2)$$

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - 3 \beta \cos B = 0. \quad (A_2 C_2)$$

Cherchons la loi des coefficients.

Soit $m_2 = 3$, c'est le coefficient qu'on vient de trouver; cherchons l'équation de $A_3 B_3$, nous trouverons par le même procédé, en remplaçant 3 par m_2, l'équation suivante :

$$+ \alpha \cos A + \beta \cos B - \frac{m_2 + 2}{m_2} \gamma \cos C = 0,$$

de même pour les autres lignes; ainsi

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \frac{m_1 + 2}{m_1}, \quad m_3 = \frac{m_2 + 2}{m_2}.$$

Or, l'opération se faisant toujours de la même manière, on aura

$$m_n = \frac{m_{n-1} + 2}{m_{n-1}}.$$

On aura la suite

$$m_1 = 1,$$

$$m_2 = 3,$$

$$m_3 = \frac{5}{3},$$

$$m_4 = \frac{11}{5}.$$

Si on multiplie ces fractions par $\frac{3}{3}$, on aura les fractions suivantes :

$$\frac{3}{3} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{15}{9} \cdot \frac{33}{15} \cdots$$

On peut remarquer que tous les numérateurs sont de la forme

$$2^k + 1,$$

ainsi ou pour

$$m_4 = \frac{33}{15} = \frac{32+1}{16-1} = \frac{2^5+1}{2^4-1},$$

et en général pour l'indice $2p$, on aura

$$m_{2p} = \frac{2^{2p+1}+1}{2^{2p}-1},$$

et pour

$$m_{2p+1} = \frac{m_{2p}+2}{m_{2p}} = \frac{2^{2p+2}-1}{2^{2p+1}+1}.$$

Si on fait $p = \infty$ on aura

$$\frac{2 - \frac{1}{2^{2p+1}}}{1 + \frac{1}{2^{2p+1}}},$$

et

$$m_\infty = 2.$$

ainsi

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C = 0. \qquad (A_\infty B_\infty)$$

Cette ligne passe par le point des rencontres de trois hauteurs; car si on retranche son équation de celle de AA_1, il vient

$$\alpha \cos A - \gamma \cos C = o, \quad \text{équation de } BB_1,$$

de même pour les droites $A_\infty C_\infty$, $B_\infty C_\infty$.

Les équations $A_n B_n$ et $A_n C_n$ sont les suivantes :

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = o, \quad (A_n B_n)$$

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - m_n \beta \cos B = o, \quad (A_n C_n)$$

et la soustraction donne

$$B \cos \beta - \gamma \cos C = o, \quad (AA_1)$$

$$\beta \cos B + \gamma \cos C - m_{n-1} \alpha \cos A = o, \quad (B_{n-1} C_{n-1}).$$

On voit que le rapport *anharmonique* de ces quatre droites $A_n B_n$, $A_n C_n$, $B_{n-1} C_{n-1}$, AA_1 est égal à -1; donc elles forment un faisceau *harmonique;* ainsi le faisceau $A_1 B$, $A_1 C_1$, $A_1 A$, $A_1 B_1$ est harmonique, mais l'angle $AA_1 B$ est droit, donc AA_1 est la bissectrice de l'angle $C_1 A_1 B_1$; cette propriété n'a lieu que pour ce *seul* faisceau, comme l'a très-bien remarqué M. de Jonquières (t. XVI, p. 409).