

BOURDELLES

Solution de la question 348 (Mannheim)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 50-52

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__50_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 548 (MANNHEIM)

(voir n° XV, p. 407.)

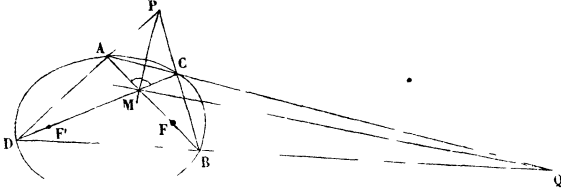
PAR M. BOURDELLES,

élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Etant donnée une conique dont les foyers sont F et F' et un point quelconque M dans l'intérieur de cette conique; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B , et MF' rencontrant la conique en C et D , on aura

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}.$$

Lorsque le point M est intérieur, les sommes sont remplacées par des différences.



Soit P le point d'intersection des droites AD et CB , soit Q celui des droites AC et DB , joignons le point M aux points P et Q .

Si l'on remarque qu'il résulte de la construction précédente que PM est la polaire du point Q , que MQ est celle du point P , et que les droites MA , MP , MC , MQ forment un faisceau harmonique, comme ces droites MA et MC passent chacune par un foyer de la section conique, les droites MP et MQ sont rectangulaires; elles sont donc les bissectrices des angles formés au point M par les droites AB et DC .

En vertu de la proposition énoncée par $M.$ Mannheim (*Nouvelles Annales*, tome XV, p. 383), si l'on considère l'angle P et les transversales DC et AB , on a

$$\frac{1}{PMA} + \frac{1}{PMB} = \frac{1}{PMC} + \frac{1}{PMD},$$

ou bien, en exprimant les surfaces de ces triangles en fonction de deux côtés et de l'angle compris par ces côtés, on aura

$$\frac{1}{MP \sin PMA} \left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \right) = \frac{1}{MP \sin PMC} \left(\frac{1}{MC} + \frac{1}{MD} \right),$$

et comme les angles AMP , PMC sont égaux, en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par les quantités

(52)

égales

$$MP \sin PMA = MP \sin PMC,$$

on obtient

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}.$$

C. Q. F. D.

Si le point M est extérieur, il est évident que la somme serait remplacée par la différence, car alors on partirait de la relation

$$\frac{1}{PMA} - \frac{1}{PMB} = \frac{1}{PMC} - \frac{1}{PMD}.$$

La propriété subsiste pour une conique quelconque.
