## Nouvelles annales de mathématiques

## Géométrie algorithmique sur les polygones inscrits et circonscrits à des coniques ; d'après M. Brioschi

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1857), p. 421-428

<a href="http://www.numdam.org/item?id=NAM\_1857\_1\_16\_\_421\_1">http://www.numdam.org/item?id=NAM\_1857\_1\_16\_\_421\_1</a>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques http://www.numdam.org/

## GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE.

Sur les polygones inscrits et circonscrits à des coniques;

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Ann. de Tortolini, 1857.

1. Lemme. Soient u, v, w trois fonctions linéaires à

denx variables:

$$U = \alpha vw + \beta wu + \gamma uv,$$

$$V = l^{2}u^{2} + m^{2}v^{2} + n^{2}w^{2} - avw - bwu - cuv,$$

$$tU - V = vw(t\alpha + a) + wu(t\beta + b) + uv(t\gamma + c)$$

$$- l^{2}u^{2} - m^{2}v^{2} - n^{2}w^{2},$$

 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,..., a, b, c,... sont des constantes données et t une constante arbitraire égalant à zéro les trois dérivées de tU - V prises par rapport à u, v, w; on obtient

$$w(t\beta + b) + v(t\gamma + c) - 2l^{2}u = 0,$$
  

$$w(t\alpha + a) - 2vm^{2} + (t\gamma + c)u = 0,$$
  

$$-2n^{2}w + v(t\alpha + a) + (t\beta + b)u = 0.$$

Pour que ces trois équations subsistent simultanément, il faut que le déterminant soit nul; ce déterminant, qu'on nomme le discriminant de la fonction tU - V est

$$a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0$$

où

$$a_0 = \alpha \beta \gamma,$$

$$a_1 = l^2 a^2 + m^2 \beta^2 + n^2 \gamma^2 + a \beta \gamma + b \alpha \gamma + c \alpha \beta,$$

$$a_2 = 2 a \alpha l^2 + 2 b \beta m^2 + 2 c \gamma n^2 + \alpha b c + \beta c a + \gamma a b,$$

$$a_3 = l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2 + a b c - 4 l^2 m^2 n^2.$$

2. L'intersection de la droite u = 0, avec la conique tU - V = 0, donne

$$m^2v^2+n^2w^2-vw(t\alpha+a)=0.$$

Lorsque cette équation est un carré parfait, la droite u = 0 est tangente à la conique, ce qui donne

$$t=\frac{2\,mn-a}{\alpha}.$$

Désignous cette valeur particulière de t par t1, nous avons

done

$$a = 2 mn - \alpha t_1$$

Désignons de même par  $t_2$ ,  $t_3$  les valeurs particulières de t qui rendent les droites v = 0, w = 0 tangentes même aux deux coniques  $t_2 U - V = 0$ , nous avons les trois équations

$$a = 2mn - \alpha t_1,$$

$$b = 2nl - \beta t_2,$$

$$c = 2lm - \gamma t_3.$$

En posant

$$U = 0$$
,

le triangle u, v, w est inscrit dans cette conique et circonscrit aux trois coniques :

$$t_1 \mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{0},$$
  

$$t_2 \mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{0},$$
  

$$t_3 \mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{0}.$$

3. Substituons ces valeurs de a, b, c dans les coefficients du discriminant, on obtient

$$a_{0} = \alpha \beta \gamma,$$

$$a_{1} = p^{2} - \alpha \beta \gamma (t_{1} + t_{2} + t_{3}),$$

$$a_{2} = 2pq + \alpha \beta \gamma (t_{1}t_{2} + t_{2}t_{3} + t_{3}t_{1}),$$

$$a_{3} = q^{2} - \alpha \beta \gamma t_{1}t_{2}t_{3},$$

$$p = t\alpha + m\beta + n\gamma,$$

$$q = 4r - t\alpha t_{1} - m\beta t_{2} - n\gamma t_{3},$$

Soit

οù

(1) 
$$(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) = t^2 + At^2 + Bt + C = 0;$$
  
d'après les propriétés d'Albert Girard, on a les rela-

r = lmn.

tions

(2) 
$$p^2 = a_1 - a_0 A$$
,  $2pq = a_2 - a_0 B$ ,  $q^2 = a_3 - a_0 C$ ;

d'où l'on déduit

$$4 (a_1 - a_0 A) (a_3 - a_0 C) = (a_2 - a_0 B)^2,$$

relation qui a été donnée aussi par MM. Cayley et Salmon, mais par d'autres raisonnements.

4. On a, d'après les équations (2),

$$p^{2}t^{2} + 2pqt + q^{2} = (pt + q)^{2} = a_{0}t^{3} + a_{1}t^{2} + a_{2}t + a_{3}$$

$$= a_{0}(t - t_{1})t - t_{2})(t - t_{3})(^{*});$$

car cette équation est satisfaite par les trois racines  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , et en développant, on a

$$pt + q = \sqrt{a_0 t^2 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3}$$
  
=  $A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \dots = F(t)$ ,

ce qui donne

$$A_{0}^{2} = a_{5},$$

$$2A_{0}A_{1} = a_{2},$$

$$A_{1}^{2} + 2A_{1}A_{2} = a_{1},$$

$$A_{1}^{3} + 2A_{1}A_{2} + 2A_{0}A_{3} = a_{0}...,$$

$$pt_{1} + q = A_{0} + A_{1}t_{1} + A_{2}t_{1}^{2} + A_{3}t_{3}^{3}...,$$

$$pt_{2} + q = A_{0} + A_{1}t_{2} + A_{2}t_{2}^{2} + A_{3}t_{3}^{3}...,$$

$$p = A_{1} + A_{2}(t_{2} - t_{1}) + A_{3}(t_{2}^{2} - t_{1}t_{2} + t_{1}^{2})...,$$

$$q = A_{0} - t_{1}t_{2}P,$$

ou

$$P = A_2 + A_3(t_1 + t_2) + A_4(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + \dots$$

La troisième des équations (2) donne

$$q^2 = a_3 - a_0 t_1 t_2 t_3 = A_0^2 - 2 A_0 t_1 t_2 P + t_1^2 t_2^2 P^2;$$
  
 $a_0 b_1 t_2 = a_0 (A_0 - q),$ 

<sup>(^)</sup> Il suffit de remplacer dans l'equation  $t^2 + A t^2 + B t + C = 0$ , A, B, C par les valeurs en p, q,  $a_0$ , etc.

done

$$t_3=\frac{a_3-q^2}{a_3t_1t_2},$$

d'où

$$t_3 = \frac{1}{a_0} (t_1 t_2 \mathbf{P}^2 - 2 \mathbf{A}_0 \mathbf{P}).$$

Si l'on pose  $t_1 = t_2 = 0$ , ou si a = 2mn, b = 2nl; alors les droites u = 0, v = 0 inscrites dans U = 0 sont tangentes à V = 0 et à la conique  $t_3U - V = 0$ ; or alors

(3) 
$$t_3 = -\frac{2 A_0 A_2}{a_0} = \frac{a_2^2 - 4 a_1 a_3}{4 a_0 a_3}.$$

Le troisième côté w = 0 est donc tangent à la conique  $(a_1^2 - 4a_1a_3)$  U  $- 4a_0a_3$  V = 0, et si  $a_1^2 = 4a_1a_3$ , le triangle u, v, w sera à la fois inscrit à la conique U = 0 et circonscrit à la conique V = 0, et lorsque les trois conditions a = 2mn, b = 2nl,  $a_1^2 = 4a_1a_3$  subsistent, un triangle circonscrit à V ayant deux côtés inscrits dans U et circonscrit à V aura de même le troisième côté.

## 5. Soit seulement

$$t_i = 0$$
;

alors

$$P = A_2 + A_3 t_2 + A_4 t_2^2 + \dots,$$

u = 0 est tangent à la conique V = 0, et

$$a_{0} t_{3} = -2 A_{0} (A_{2} + A_{3} t_{2} + A_{4} t_{2}^{2} + ...),$$

$$a_{0} t_{2}^{2} t_{3} = -2 A_{0} (A_{2} t_{2}^{2} + A_{3} t_{2}^{2} + A_{4} t_{3}^{4} + ...)$$

$$= -2 A_{0} [A_{0} + A_{1} t_{2} - (A_{0} + A_{1} t^{2} + A_{2} t_{2}^{2} + ...)]$$

$$= -2 A_{0} [A_{0} + A_{1} t_{2} - F (t_{2})] (voir p. 424),$$

$$a_0 t_2^2 t_3 - 2 A_0 (A_0 + A_1 t_2) = -2 A_0 F(t_2);$$

élevant au carré

$$a_0^2 t_2^4 t_3^2 - 4 a_0 A_0 t_2^2 t_3 (A_0 + A_1 t_2)$$
  
=  $4 A_0^2 \{ [F(t_2)]^2 - (A_0 + A_1 t_2)^2 \},$ 

mais

$$2 A_0 A_1 = a_2, \quad A_1^2 = \frac{a_2^2}{4 a_3},$$

d'où

$$\mathbf{F}(t_2)^2 - (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t_2)^2 = \frac{t_2^2}{4 a_3} (4 a_0 a_3 t_2 + 4 a_1 a_3 - a_2^2).$$

Substituant et réduisant, on obtient

$$(4) \ a_0^2 t_2^2 t_2^2 - 4 a_0 a_3 t_3 - 2 a_0 a_2 t_2 t_3 = 4 a_0 a_3 t_2 + 4 a_1 a_3 - a_2^2,$$

sí l'on avait aussi

$$t_2 = 0$$

on retombe sur la valeur de t<sub>3</sub> trouvée ci-desus (3).

6. Soit le quadrilatère abcd inscrit dans la conique U = o, et dont trois côtés ab, bc, cd sont circonscrits à la conique V = o.

Dans le triangle abc, les côtés ab, bc sont tangents à la conique V = 0 et inscrits dans la conique U = 0. Donc, d'après ce qui précède, le troisième côté ac sera tangent à la conique  $\alpha U - V = 0$ , ou

(3) 
$$\alpha = \frac{a_2^2 - 4a_1a_3}{4a_0a_3}.$$

Dans le triangle acd, le côté cd est tangent à la conique U=0, le côté ac tangent à la conique  $\alpha U-V=0$ , le troisième côté ad sera tangent à la conique  $t_3U-V=0$ , si l'on a la relation (4), dans laquelle il faut remplacer  $t_2$  par la valeur de  $\alpha$ , et l'on obtient

$$t_{3} = \frac{16 a_{3} (8 a_{0} a_{3}^{2} + a_{2}^{3} - 4 a_{1} a_{2} a_{3})}{(a_{2}^{2} - 4 a_{1} a_{3})^{2}}.$$

Ainsi le quatrième coté sera tangent à la conique

$$16 a_3 (8 a_0 a_3^2 + a_2^3 + 4 a_1 a_2 a_3) U - (a_2^2 - 4 a_1 a_3)^2 V = 0,$$

ct si l'on a

$$8a_0a_3^2 + a_3^2 - 4a_1a_1a_3 = 0$$

le quadrilatère sera à la fois inscrit dans U = o et circonscrit à V = o. Mème observation que ci-dessus.

7. Soit le pentagone  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$  inscrit dans la conique U = 0, et supposons que les côtés  $\alpha_1 \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \alpha_3$ ,  $\alpha_3 \alpha_4$ ,  $\alpha_4 \alpha_5$  soient tangents à la conique V = 0, le côté  $\alpha_5 \alpha_1$  sera tangent à la conique  $t_5 U - V = 0$ . Il s'agit de trouver  $t_5$ .

Dans le triangle  $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$ , le côté  $\alpha_3 \alpha_4$  est tangent à V, on a donc entre  $t_3$  et  $t_4$  la relation (4)

$$a_0^2 t_1^2 t_4^2 - 4 a_0 a_3 t_4 - 2 a_0 a_2 t_3 t_4 = 4 a_0 a_3 t_3 + 4 a_1 a_2 - a_2^2$$

Dans le triangle  $\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5$ , le côté  $\alpha_4 \alpha_5$  est tangent à la conique V = 0, on a donc encore

$$a_0^2 t_4^2 t_5^2 - 4 a_0 a_3 t_5 - 2 a_0 a_2 t_4 t_5 = 4 a_0 a_3 t_4 + 4 a_1 a_3 - a_2^2$$

Soustrayant on a

$$a_0^2 t_4^2 (t_5 + t_3) = 4 a_0 a_3 + 2 a_0 a_2 t_4.$$

La première des équations donne

$$a_0^2 t_5 t_4^2 t_3 = a_2^2 - 4 a_1 a_3 - 4 a_0 a_3 t_4$$

d'où

$$t_5 = \frac{4 a_0 a_2 (\alpha - t_4)}{a_0^2 t_3 t_4^2}.$$

On connaît  $t_3$  et  $t_4$ , par conséquent  $t_5$ , et de même pour les polygones de tout nombre de côtés.

Observation. Ce magnifique travail est, à ce que je sache, la démonstration analytique la plus simple qu'on ait donnée du célèbre théorème de M. Poncelet; généralisation du théorème pour deux cercles, auquel le théorème général peut être ramené, puisque, d'après un autre

théorème de M. Poncelet, deux coniques sont les perspectives de deux cercles. La précédente analyse résout cette question: un polygone de n côtés étant inscrit dans une conique; n-1 des côtés étant respectivement des tangentes à un faisceau de n-1 coniques passant par les mêmes quatre points, trouver la  $n^{ième}$  conique du faisceau qui soit touchée par le  $n^{ième}$  côté du polygone; or l'on peut trouver les conditions pour que le faisceau de n coniques se condense en une seule conique, l'on a donc le problème Poncelet. Jacobi a rattaché cette recherche aux fonctions elliptiques (Nouvelles Annales, t. IV, p. 377).