

ANGE LE TAUNÉAC

Note sur la question 350 (Wronski)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 416-417

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__416_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA QUESTION 350 (WRONSKI)

(voir p. 248) ;

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

L'énoncé de cette question, tel qu'on le lit à la page 248, n'est peut-être ni très-clair ni très-exact. On pourrait, je pense, le modifier ainsi :

Étant donnée une équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

dont les racines sont $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, calculer la fonction homogène de degré p :

$$B_p = \sum x_1^{z^p} x_2^{z^p} x_3^{z^p} \dots x_n^{z^p} \quad (*)$$

Cela posé, la solution de M. Brioschi peut être simplifiée et abrégée de la manière suivante :

La fonction homogène B_p est évidemment le coefficient de z^p dans le produit des n séries

$$\begin{aligned} & 1 + x_1 z + x_1^2 z^2 + x_1^3 z^3 + \dots, \\ & 1 + x_2 z + x_2^2 z^2 + x_2^3 z^3 + \dots, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & 1 + x_n z + x_n^2 z^2 + x_n^3 z^3 + \dots \end{aligned}$$

D'ailleurs, pourvu que le module de la variable z soit suffisamment petit, ces séries ont pour sommes respectivement

$$\frac{1}{1 - x_1 z}, \quad \frac{1}{1 - x_2 z}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1 - x_n z} ;$$

(*) Cette fonction B_p est celle que Wronski a désignée par la lettre hébraïque *aleph*.

donc

$$(1) \frac{1}{(1-x_1z)(1-x_2z)\dots(1-x_nz)} = 1 + B_1z + \dots + B_pz^p + \dots$$

Mais évidemment

$$(2) (1-x_1z)(1-x_2z)\dots(1-x_nz) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n;$$

donc

$$(3) 1 = (1 + B_1z + \dots + B_pz^p + \dots)(1 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n).$$

Cette dernière relation donne d'abord

$$(4) \begin{cases} 0 = B_1 + a_1, \\ 0 = B_2 + B_1 a_1 + a_2, \\ 0 = B_3 + B_2 a_1 + B_1 a_2 + a_3, \\ \dots \\ 0 = B_n + B_{n-1} a_1 + B_{n-2} a_2 + \dots + B_1 a_{n-1} + a_n, \end{cases}$$

et, pour toutes les valeurs de p qui surpassent n ,

$$(5) 0 = B_p + B_{p-1} a_1 + B_{p-2} a_2 + \dots + B_{p-n+1} a_{n-1} + B_{p-n} a_n.$$

Ces dernières formules ont été données par Wronski.
