

CH. MOREAU

ROCHETTE

Solution de la question 327 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 39-41

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__39_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 327 (PROUHET)

(voir t. XV, p. 230);

PAR M. CH. MOREAU,

Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot),

ET LE P. ROCHETTE, S. J.

Si les racines d'une équation du quatrième degré sont de la forme p^2 , q^2 , $p^2 + 2pq$, $q^2 + 2pq$, les racines de la dérivée sont rationnelles.

Formons l'équation du quatrième degré ayant pour racines p^2 , q^2 , $p^2 + 2pq$, $q^2 + 2pq$.

Le coefficient du terme en x^3 est égal à la somme des racines changée de signe, et, par suite, à

$$- 2(p + q)^2.$$

Le coefficient du terme en x^2 est

$$\begin{aligned} p^2 q^2 + p^2(p^2 + 2pq) + p^2(q^2 + 2pq) \\ + q^2(p^2 + 2pq) + q^2(q^2 + 2pq) \\ + (p^2 + 2pq)(q^2 + 2pq). \end{aligned}$$

Ce coefficient peut s'écrire ainsi :

$$(p + q)^4 + 2pq(p^2 + q^2 + pq).$$

Le coefficient du terme en x sera

$$- \left[\begin{array}{l} p^2 q^2 (p^2 + 2pq) + p^2 q^2 (q^2 + 2pq) \\ + p^2 (p^2 + 2pq) (q^2 + 2pq) + q^2 (p^2 + 2pq) (q^2 + 2pq) \end{array} \right].$$

En le transformant, il se met sous la forme

$$- 2pq (p + q)^2 (p^2 + q^2 + pq).$$

Le terme constant est égal au produit des racines. L'équation du quatrième degré sera donc

$$\begin{aligned} x^4 - 3(p + q)^2 x^3 + [(p + q)^4 + 2pq(p^2 + q^2 + pq)] x^2 \\ - 2pq(p + q)^2 (p^2 + q^2 + pq) x \\ + p^2 q^2 (p^2 + 2pq) (q^2 + 2pq) = 0. \end{aligned}$$

L'équation obtenue en égalant la dérivée à zéro est

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{3}{2}(p + q)^2 x^2 + \left[\frac{(p + q)^4}{2} + pq(p^2 + q^2 + pq) \right] x \\ - \frac{pq(p + q)^2 (p^2 + q^2 + pq)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Je dis maintenant que les racines de cette équation sont rationnelles et de la forme

$$pq, \quad \frac{(p + q)^2}{2}, \quad (p^2 + q^2 + pq).$$

Il est facile de le vérifier.

En effet, le coefficient $-\frac{3}{2}(p + q)^2$ est égal à la somme de ces trois racines prise en signe contraire. Le terme constant est égal à leur produit changé de signe.

De plus, le coefficient de x peut se transformer ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{(p + q)^4}{2} + pq(p^2 + q^2 + pq) \\ = & \frac{(p + q)^2}{2} (p^2 + q^2 + pq) + \frac{(p + q)^2}{2} (pq) + pq(p^2 + q^2 + pq), \end{aligned}$$

(41)

et sous cette forme on voit que c'est la somme des produits deux à deux des racines supposées.
