

Résolution en nombres entiers de l'équation
 $a^x - b^y = 1$, a et b étant des nombres premiers

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 394-398

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__394_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$a^x - b^y = 1,$$

a et b étant des nombres premiers.

Je distingue ces deux cas : $a = 2$, $a > 2$.

1^o. $a = 2$. L'équation à résoudre est

$$2^x - b^y = 1.$$

On en tire successivement :

$$2(2^{x-1} - 1) = b^y - 1 = (b - 1)(b^{y-1} + b^{y-2} + \dots + b + 1);$$

$$2^{x-1} - 1 = \frac{b - 1}{2} (b^{y-1} + b^{y-2} + \dots + b + 1).$$

Cette dernière équation montre que

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \dots + b + 1$$

doit être un nombre impair. Et comme le nombre des

termes de

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \dots + b + 1$$

est y et qu'en outre le nombre premier b est impair, il faut que y soit aussi un nombre impair. Il en résulte que $b^y + 1$ est exactement divisible par $b + 1$: mais

$$b^y + 1 = 2^x;$$

donc 2^x est divisible par $b + 1$, ce qui exige que $b + 1$ soit une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier b ait la forme $2^n - 1$.

En divisant par $b + 1$ les deux membres de l'équation proposée

$$b^y + 1 = 2^x,$$

elle se transforme en celle-ci :

$$\begin{aligned} b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} - \dots + b^1 - b + 1 \\ = \frac{2^x}{b + 1} = \frac{2^x}{2^n} = 2^{x-n}. \end{aligned}$$

Or $b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} + \dots + b^2 - b + 1$ est nécessairement un nombre impair, puisque b et y sont impairs : donc il faut qu'on ait

$$2^{x-n} = 1,$$

d'où

$$x = n,$$

et, par suite,

$$y = 1.$$

De ce qui précède, nous concluons que l'équation proposée

$$2^x - b^y = 1$$

n'a aucune solution entière si le nombre premier b n'a pas la forme $2^n - 1$, et que si b a cette forme, l'équation admet une solution entière et une seule qui est

$$x = n, \quad y = 1.$$

2°. $a > 2$. L'équation

$$a^x - b^y = 1$$

donne

$$a^x - 1 = b^y :$$

mais $a^x - 1$ est un nombre pair; donc

$$b = 2.$$

D'ailleurs b^y est exactement divisible par $a - 1$; par conséquent $(a - 1)$ est une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier a doit avoir la forme $2^n + 1$. Ces deux conditions étant supposées remplies, l'équation proposée devient

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1;$$

elle est vérifiée par

$$x = 1, \quad y = n;$$

il reste à examiner si elle peut avoir d'autres solutions entières.

Supposons que l'équation

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1$$

ou

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y$$

puisse admettre une solution entière dans laquelle on ait $x > 1$, la valeur correspondante de y sera évidemment plus grande que n , et en divisant par $(2^n + 1) - 1$ les deux membres de

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y,$$

il en résultera cette nouvelle équation

$$(2^n + 1)^{x-1} + (2^n + 1)^{x-2} + \dots + (2^n + 1) + 1 = \frac{2^y}{2^n} = 2^{y-n},$$

dont le second membre sera un nombre pair. Il en sera

de même du premier, et il faudra que x soit aussi un nombre pair. Dans ce cas, $(2n + 1)^x - 1$ est exactement divisible par $(2^n + 1) + 1$ ou $2(2^{n-1} + 1)$. Donc $2^{n-1} + 1$ devra diviser 2^y , ce qui entraîne la condition $n = 1$. En supposant qu'elle soit remplie, l'équation proposée devient

$$3^x - 1 = 2^y \quad \text{ou} \quad 2^y + 1 = 3^x.$$

On voit que y doit être impair, puisque $2^y + 1$ admet le diviseur 3 ou $2 + 1$. En effectuant la division des deux membres par $2 + 1$, on a

$$2^{y-1} - 2^{y-2} + 2^{y-3} - 2^{y-4} + \dots + 2^2 - 2 + 1 = 3^{x-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} (2^{y-1} - 1) - (2^{y-2} + 1) + (2^{y-3} - 1) - \dots + (2^2 - 1) \\ - (2 + 1) + y = 3^{x-1}. \end{aligned}$$

Mais les différences

$$(2^{y-1} - 1), (2^{y-2} + 1), (2^{y-3} - 1), \dots$$

sont des multiples de 3, donc y est multiple de 3; et comme x est pair, on pourra poser

$$y = 3y', \quad x = 2x' \quad (*):$$

il s'ensuivra

$$3^{2x'} - 1 = 2^{3y'} \quad \text{ou} \quad 9^{x'} - 1 = 8^{y'}.$$

Cette dernière équation n'admet que la solution entière

$$x' = 1, \quad y' = 1.$$

En effet, x' ne peut être un nombre pair, puisque $8^{y'}$

(*) En général, dans l'équation

$$(a + 1)^x - a^y = 1,$$

l'inconnue x ne peut admettre pour valeur entière, différente de l'unité, qu'un multiple de a , et toute valeur entière de y plus grande que l'unité est nécessairement multiple de $a + 1$.

n'est pas divisible par $9 + 1$ ou 10 . Il est de même impossible que x' soit un nombre impair plus grand que l'unité. Car, si cela était, y' sera aussi plus grand que l'unité, et en divisant par 8 les deux membres de $9^{x'} - 1 = 8^{y'}$, on aurait

$$9^{x'-1} + 9^{x'-2} + \dots + 9 + 1 = 8^{y'-1}.$$

égalité qui exprime qu'un nombre impair

$$9^{x'-1} + 9^{x'-2} + \dots + 9 + 1$$

est un multiple de 8 . Donc la seule valeur entière que x' puisse avoir est

$$x' = 1,$$

d'où

$$y' = 1, \quad x = 2, \quad y = 3.$$

Au résumé, lorsque le nombre premier a est plus grand que 2 , il faut pour que l'équation

$$a^x - b^y = 1$$

ait une solution entière, que $b = 2$, et qu'en outre a soit de la forme $2^n + 1$. Quand ces deux conditions sont remplies, l'équation admettra la solution entière

$$x = 1, \quad y = n;$$

et elle n'en aura pas d'autre si n est différent de l'unité. Mais si $n = 1$, l'équation admettra les deux solutions

$$x = 1, \quad y = 1 \quad \text{et} \quad x = 2, \quad y = 3.$$
