

MICHAEL ROBERTS

**Sur une question d'algèbre relative à deux équations du quatrième degré**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1857), p. 366-369

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_366\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__366_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE  
RELATIVE A DEUX ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ**

(voir t. XV, p. 76);

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

---

Étant données deux équations biquadratiques, savoir

(I)  $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$  (racines  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ),

(II)  $a'x^4 + 4b'x^3 + 6c'x^2 + 4d'x + e' = 0$  (racines  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ),

je vais présenter dans ce qui suit les éléments de la formation de l'équation ayant pour racines les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'.$$

Il est facile de voir que cette fonction a vingt-quatre valeurs, et l'équation dont il s'agit est assez compliquée : mais en faisant usage des solutions algébriques des équations données, j'ai réussi à la mettre sous une forme simple, qui se prête facilement aux divers résultats. Je dois mentionner surtout que j'ai été ainsi conduit par une

marche très-simple à l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I) : résultat que je ne me souviens d'avoir rencontré dans aucun traité d'algèbre.

Posons d'abord

$$\begin{aligned} a^2 \varpi &= b^2 - ac, \\ 12 a^2 \mu &= ae - 4bd + 3c^2, \\ 8a^3 \lambda &= ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3, \\ l &= -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^3}, \quad m = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^3}, \end{aligned}$$

et désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues pour l'équation (II).

Faisons maintenant

$$z = \alpha x^2 + \beta \beta' + \gamma \gamma' + \delta \delta'$$

et introduisons la quantité auxiliaire  $u$  donnée par l'équation

$$u = \frac{1}{4} \left( z - \frac{4bb'}{aa'} \right)$$

et posons

$$u^3 - 6\varpi\varpi' u^2 - 2u \frac{(a^2 d - 3abc + 2b^3)(a'^2 d' - 3a' b' c' + 2b'^3)}{a^2 a'^3}$$

$$- 3(3\varpi^2 \varpi'^2 - 4\varpi^2 \mu' - 4\omega'^2 \mu - 2\mu\mu') = P,$$

$$6u^2 - 3 \left( 2\varpi\varpi' - \frac{l'm}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi l'}{\mu'} + \frac{4\varpi' m}{\mu} \right) = Q,$$

$$6u^2 - 3 \left( 2\varpi\varpi' - \frac{lm'}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi m'}{\mu'} + \frac{4\omega' l}{\mu} \right) = R,$$

et l'équation cherchée s'écrit de la manière suivante

$$P = Q(lm')^{\frac{1}{3}} + R(l'm)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne

$$(III) \quad P^3 = Q^3 lm' + R^3 l'm + 3\mu\mu' PQR.$$

Or cette équation monte au douzième degré et ne contient que la seule expression irrationnelle

$$\sqrt{(\lambda^2 - \mu^3)(\lambda'^2 - \mu'^3)},$$

d'où, en élevant au carré, nous passons à l'équation cherchée

Pour trouver l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I), il suffit de poser dans l'équation (II)

$$a' = 6, \quad b' = 0, \quad c' = -1, \quad d' = 0, \quad e' = 0. (*),$$

et, en substituant ces valeurs, nous trouvons

$$P = u^4 + \varpi u^2 + \frac{3}{8}\mu, \quad Q = 6u^2 + \frac{q}{4}\frac{m}{\mu}, \quad R = 6u^2 + \frac{q}{4}\frac{l}{\mu},$$

et l'équation (III) donne (en posant  $2u^2 = \theta$ )

$$\begin{aligned} \left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right)^3 &= \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l + \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^3 m \\ &+ 3\mu \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right) \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right) \left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right) \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right)^3 &= \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l + \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^2 m \\ &+ 3 \left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right) \left(\mu\theta^2 - \frac{3}{2}\lambda\theta + \frac{9}{16}\mu^2\right), \end{aligned}$$

et, en posant

$$t = -8\theta,$$

les quantités

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2, \quad (\alpha - \gamma)^2, \quad (\alpha - \delta)^2, \\ (\beta - \gamma)^2, \quad (\beta - \delta)^2, \quad (\gamma - \delta)^2 \end{aligned}$$

(\*)  $z^2$  devient alors  $6(\alpha - \alpha')^2$ .

seront les racines de l'équation suivante en  $t$  :

$$t^6 - 4\delta\varpi t^5 + 96t^4(\mu + \delta\varpi^2) - 256t^3(16\varpi^3 + 24\mu\varpi + 13\lambda) \\ + (4\delta)^2 t^2(32\varpi^2\mu + 16\varpi\lambda - 7\mu^2) - (24)^4 t(\mu^2\varpi + \mu\lambda) \\ + 108.8^4(\mu^3 - \lambda^2) = 0.$$

Si les équations données sont identiques, l'équation (III) appartient à deux équations distinctes.

On peut remarquer la relation suivante, qu'on peut démontrer directement :

$$4a^6(\varpi^3 - 2\lambda - 3\varpi\mu) = (a^2d - 3abc + 2b^3)^2.$$