BUCH

Travail dans la poulie mobile

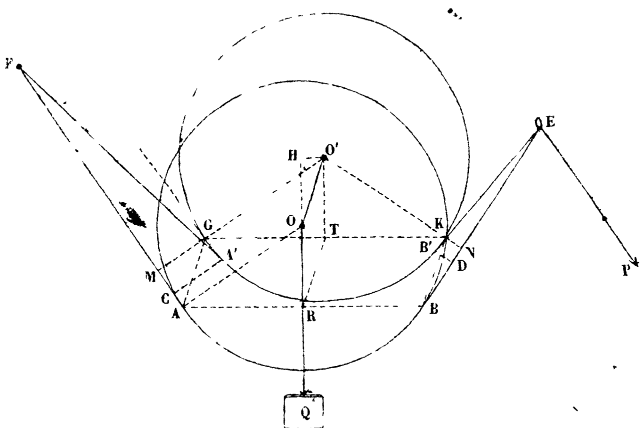
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 344-346

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__344_1>

TRAVAIL DANS LA POULIE MOBILE;

PAR M. BUCH,
Professeur de mathematiques speciales au lycée de Strasbourg.

Soient O la poulie mobile, F le point d'attache du cor-



don; je suppose que ce cordon passe dans un anneau E. C'est suivant ce cordon qu'agit la puissance P. La force Q appliquée en O, et que je supposerai verticale, est la résistance à vaincre. α désignant l'angle des cordons avec la verticale, l'équation d'équilibre est

$$Q = 2 P \cos\alpha.$$

Imprimons au système un déplacement virtuel. En vertu de ce déplacement le centre O sera venu en O', et il sera sorti une certaine longueur de cordon. Désignons OO' ou le chemin élémentaire parcouru par le centre de la poulie par s et par ω l'angle que fait OO' avec la verticale.

L'expression du travail élémentaire résistant sera

$$Q s \cos\omega.$$

Cela posé, tâchons d'évaluer la longueur du cordon qui est sortie.

AB est l'arc embrassé par le cordon dans la première position.

A'B' est l'arc embrassé après le déplacement virtuel. Inscrivons la corde GK égale et parallèle à AB, et des points F et E décrivons des arcs de cercle qui rencontrent FA et EB aux points C et D. (Ces points C et D, en négligeant les infiniment petits du second ordre, ne sont autre chose que les projections des points A et A'.)

Il est évident maintenant que si l'on représente par l la longueur du cordon sorti de l'anneau, on aura

$$l = AC + GA' + BD + B'K.$$

Joignons le point T, milieu de GK, avec R, milieu de AB; joignons aussi AG, BK, GO', AO: on aura

$$AG = BK = TR = OO',$$

et AO est égal et parallèle à GO'.

La tangente au point G est donc parallèle à FA. Mais cette tangente est dirigée suivant l'arc élémentaire GA′ qui, par conséquent, se projette en vraie grandeur suivant MC. De même l'arc élémentaire KB′ se projettera en vraie grandeur suivant ND.

Nous aurons dès lors

$$l = \mathrm{AM} + \mathrm{BN}.$$

Il est évident que nous ne négligeons que des infiniment petits du deuxième ordre.

Mais

$$\mathrm{AM} = s$$

est la projection de AG sur FA ; donc

$$\mathrm{AM} = s\cos(\alpha + \omega).$$

De même

$$\mathrm{BN} = s\cos(\alpha - \omega) ;$$

donc

$$\mathrm{AM} + \mathrm{BN} = l = 2\,s\cos\alpha\cos\omega.$$

Le travail de la puissance est par conséquent

$$\mathrm{P}\,l = 2\mathrm{P}s.\cos\alpha\cos\omega,$$

et comme le travail de Q est

$$\mathrm{Q}s\cos\omega,$$

on peut écrire

$$\mathrm{TP} = \mathrm{TQ}$$

en vertu de la relation

$$\mathrm{Q} = 2\mathrm{P}\cos\alpha.$$

C. Q. F. D.