

FAURE

Théorème sur quatre carrés

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 342-344

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__342_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR QUATRE CARRÉS;

PAR M. FAURE.
Capitaine d'artillerie.

Théorème Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques d'entre eux diminuée du quatrième fasse un carré. (EULER.)

Lemme. Il est impossible de satisfaire en nombres entiers à l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = z^2.$$

Si l'on pose

$$z = x + y + t,$$

on a

$$x^2 - 2tx + y^2 - t^2 - 2ty = 0,$$

d'où

$$x = t \pm \sqrt{3t^2 - (y - t)^2};$$

il faudra donc poser

$$3t^2 - (y - t)^2 = k^2.$$

Or l'on ne peut satisfaire à cette équation, puisque la somme de deux carrés ne peut être divisible par 3 et que d'ailleurs k et $y - t$ ne peuvent être à la fois divisibles par 3.

Revenant au théorème d'Euler, je suppose que l'on puisse avoir à la fois les quatre équations

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = a, \\ x^2 + y^2 - z^2 + t^2 = b^2, \\ x^2 - y^2 + z^2 + t^2 = c^2, \\ -x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = d^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$(2) \quad \begin{cases} 4x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2, \\ 4y^2 = a^2 + b^2 - c^2 + d^2, \\ 4z^2 = a^2 - b^2 + c^2 + d^2, \\ 4t^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{cases}$$

D'où il résulte que des quatre nombres a, b, c, d deux sont nécessairement pairs s'ils ne sont pas tous impairs

On pourra donc poser

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2A, \\ a + b - c - d &= 2B, \\ a - b + c - d &= 2B, \\ -a + b + c - d &= 2B, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2a &= A + B + C - D, \\ 2b &= A + B - C + D, \\ 2c &= A - B + C + D, \\ 2d &= A - B - C - D \end{aligned}$$

Le système (2) devient ainsi

$$16x^2 = (A + B)^2 + (C - D)^2 + (A - B)(C + D),$$

$$16y^2 = (A + B)^2 + (C - D)^2 - (A - B)(C + D),$$

$$16z^2 = (A - B)^2 + (C + D)^2 + (A + B)(C - D),$$

$$16t^2 = (A - B)^2 + (C + D)^2 - (A + B)(C - D).$$

L'une des équations (1), la première par exemple, devient

$$2(A + B)^2 + (C - D)^2 + 2(A + B)(C - D) - 16a^2,$$

équation impossible d'après le lemme.
