

## Géométrie algorithmique

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1857), p. 300-309

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_300\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__300_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**GEOMÉTRIE ALGORITHMIQUE.**


---

I. Selon Kant, selon ce philosophe par excellence, car il n'est pas rhéteur (\*), un jugement est *synthétique* lorsqu'il réunit deux idées dont l'une n'est pas une conséquence *nécessaire* de l'autre. Par exemple, *un corps est pesant* est une proposition *synthétique*. On ajoute (συντίθημι) au corps une qualité qui n'est pas renfermée dans l'idée du corps : on peut concevoir une substance non pesante; tandis que cette autre proposition, *un corps est étendu*, est un jugement *analytique*. L'idée de l'étendue est déjà comprise dans celle du corps; on l'en détache seulement (αλλω). Or le but de toute science est de *connaître*, de trouver ce qui est inconnu. Il y a pour cela deux moyens : ou l'on réunit des idées connues pour en former une idée complexe qui était inconnue : c'est procéder par *synthèse*; ou bien on décompose l'idée complexe inconnue en idées simples connues : c'est procéder par *analyse*. Supposons qu'un homme se trouvant en A demande le chemin pour aller à l'endroit B; on peut lui indiquer, partant de A, tous les endroits par lesquels il doit successivement passer pour arriver à B; c'est la route *synthétique*; on peut aussi lui indiquer les endroits qui mènent de B vers A : c'est la route *analytique*. La première route est la plus naturelle lorsqu'elle mène au but : aussi c'est celle qui est la plus anciennement suivie; mais on n'est pas toujours sûr qu'elle mènera au but, car on ne

---

(\*) Nos philosophes actuels visent à l'éloquence, considérant la philosophie comme une branche de la littérature et non comme une science. Les remarquables ouvrages du P. Gratry ne sont pas exempts de ce défaut.

sait quelle direction prendre ; tandis que la route analytique, dès qu'on aboutit à un endroit connu, n'importe lequel, atteint son but.

Les *treize livres des Éléments* sont un chef-d'œuvre de synthèse.

Euclide (— 385), platonicien, voulait probablement rendre accessibles les écrits de son maître et particulièrement le *Timée*, où il est souvent question des polyèdres réguliers (\*). Car, chose qui paraît singulière aujourd'hui, les anciens philosophes étaient géomètres. Euclide, partant des idées les plus simples, généralement admises sur l'espace, ajoutant, *synthétisant* vérités sur vérités, parvient au XIII<sup>e</sup> livre à l'idée complexe des polyèdres réguliers et démontre les propriétés mentionnées dans le *Timée*. On n'y rencontre aucune évaluation soit d'aires, soit de volumes ; c'était étranger au sujet. Il suffit d'un examen superficiel sur le contenu et la forme du XIV<sup>e</sup> et du XV<sup>e</sup> livre pour se convaincre qu'ils ne peuvent être d'Euclide. On les attribue à Hysicle (— 230).

La *Mécanique* de Lagrange est un chef-d'œuvre d'analyse. Il décompose l'idée des *vitesses virtuelles* et en déduit tout ce qu'il est possible de savoir sur le mouvement et ses diverses causes. Toutefois, c'est une grande erreur de croire que jamais Euclide ne fait usage d'analyse et jamais Lagrange de synthèse. C'est une impossibilité logique ; mais comme la synthèse domine dans la géométrie et l'analyse dans l'algèbre, chacune de ces sciences a été désignée par sa partie dominante. On a donné le nom de *géométrie analytique* à l'emploi de l'instrument algébrique pour découvrir les propriétés de l'espace. Cette dénomination a le défaut d'être trop ab-

---

(\*) C'est l'opinion très-plausible de Dounot, estime de Descartes, le plus intelligent des premiers traducteurs en français d'Euclide (1613).

solue, trop exclusive. Aussi un mathématicien qui joignit à un vaste savoir un grand fonds de charlatanisme et qui a souillé à dessein ses œuvres les plus considérables d'une obscurité calculée, d'une profondeur factice, Wronski, substitue à cette dénomination celle de *géométrie algorithmique*. Dans un Rapport sur un Mémoire de Wronski, Lagrange et Lacroix ont loué et approuvé cette locution. Elle est en effet très-caractéristique et fait ressortir la différence fondamentale entre la géométrie d'Euclide et celle de Descartes. Dans la première, les figures sont *tracées*, l'œil extérieur suit toujours les mouvements de l'œil intérieur ; tandis que dans la seconde, les figures sont présentées par des signes et ce n'est guère qu'à la fin du procédé logique que l'œil intervient pour opérer *les constructions* : un procédé est graphique et l'autre est purement signalétique, en d'autres termes, purement algorithmique. L'instrument se compose d'*équations* dont le maniement est souvent très-pénible, surtout quand il s'agit d'opérer des éliminations. Dans ces derniers temps, les équations elles-mêmes étant présentées par des *signes*, l'algorithmie géométrique a été considérablement perfectionnée. La combinaison de ces signes, qui se fait pour ainsi dire à vue, amène avec une facilité étonnante des théorèmes d'une extrême généralité et qu'il serait très-pénible d'aborder directement, même en s'aidant de la géométrie graphique. Cette nouvelle algorithmie est exposée avec une grande lucidité, d'une manière très-élémentaire, dans l'ouvrage suivant :

*A Treatise of conic Sections, containing on account of some of the most important modern algebraic and geometric methods, by the rev. Georg. Salmon. Second edition, revised and enlarged. Dublin, MDCCCL (\*) :*

---

\*) Il existe une troisième édition que nous ne connaissons pas

Traité des Sections coniques, où l'on rend compte de quelques-unes des plus importantes méthodes modernes, algébriques et géométriques; par le rév. Georg. Salmon. Dublin, 1850; in-8 de 343 pages.

Nous allons donner un spécimen de ces méthodes.

2. Soit

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

l'équation d'une droite; axes rectangulaires;  $p$  est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite;  $\alpha$  l'angle que fait cette perpendiculaire avec la partie positive de l'axe des  $x$ . Nous représentons cette équation par

$$\alpha = 0;$$

de même

$$\beta = 0$$

est l'équation

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$$

d'une autre droite, etc.

$x_1, y_1$  étant les coordonnées d'un point, nous désignons par  $\alpha_1$  l'expression

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$$

Il est facile de voir que cette expression est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point  $x_1, y_1$  sur la droite  $\alpha = 0$ ; le point  $\alpha\beta$  est l'intersection des droites  $\alpha, \beta$ .

3. Soit le triangle ABC :

$$\alpha = 0 \text{ équation du côté BC,}$$

$$\beta = 0 \quad \text{—} \quad \text{AC,}$$

$$\gamma = 0 \quad \text{—} \quad \text{AB;}$$

$$\alpha + l\beta = 0,$$

$$\beta + m\gamma = 0,$$

$$\gamma + n\alpha = 0,$$

sont évidemment les équations de droites passant respectivement par les sommets C, A, B; lorsque l'on a la relation

$$(1) \quad 1 + lmn = 0,$$

les trois droites passent par le même point; car une de ces équations est alors la conséquence des deux autres. Une au moins des trois quantités doit être négative. Prenons un point quelconque  $x_1, y_1$  sur la droite

$$\alpha + l\beta = 0,$$

on a

$$l = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Au rapport  $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$  on peut substituer le rapport entre les sinus des angles que fait la droite  $\alpha + l\beta$  avec les côtés  $\alpha$  et  $\beta$ ; de même pour les deux autres droites. On voit d'après cela que les trois bissectrices, les trois médianes, les trois hauteurs satisfont à l'équation (1); donc dans chacun de ces systèmes les trois droites se coupent au même point.

On déduit aussi facilement les propriétés segmentaires.

4. *Bissectrices.* L'équation d'une bissectrice intérieure est

$$\alpha - \beta = 0$$

et celle d'une bissectrice extérieure

$$\alpha + \beta = 0;$$

les quatre droites  $\alpha, \alpha - \beta, \beta, \alpha + \beta$  forment un faisceau harmonique.

5. *Rapport anharmonique.* Soient

$$\alpha - l_1\beta = 0,$$

$$\alpha - l_2\beta = 0,$$

$$\alpha - l_3\beta = 0,$$

$$\alpha - l_4\beta = 0,$$

les équations des quatre rayons d'un faisceau ;

$$\frac{(l_4 - l_2)(l_3 - l_1)}{(l_4 - l_3)(l_2 - l_1)}$$

est le rapport *anharmonique* du faisceau. Il suffit pour s'en convaincre de couper le faisceau par une droite parallèle à l'axe des  $x$ . Si ce rapport est égal à  $-1$ , il devient *harmonique*.

6. Menons dans le triangle ABC les transversales

CF coupant AB en F,

BE — AC en E,

AD — BC en D,

et supposons que les trois transversales se rencontrent au même point O.

Soient

L le point d'intersection de FE et de BC,

M — DF — AC,

N — DE — AB,

on aura

$$l\alpha - m\beta = 0 \text{ équation de CF,}$$

$$m\beta - n\gamma = 0 \quad \text{—} \quad \text{AD,}$$

$$n\gamma - l\alpha = 0 \quad \text{—} \quad \text{BE,}$$

$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0 \quad \text{—} \quad \text{EF,}$$

$$l\alpha - m\beta + n\gamma = 0 \quad \text{—} \quad \text{DF,}$$

$$l\alpha + m\beta - n\gamma = 0 \quad \text{—} \quad \text{DE;}$$

ajoutant les trois dernières équations, on obtient

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

équation d'une droite qui passe par les trois points L, M, N; donc ces trois points sont en ligne droite.

Les quatre droites EN, EA, EF, EB forment un faisceau harmonique, car elles ont pour équations

$$\begin{aligned} l\alpha + m\beta - n\gamma &= 0, & \beta &= 0, \\ m\beta + n\gamma - l\alpha &= 0, & n\gamma - l\alpha &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

7. THÉORÈME. Soient les deux triangles ABC, A'B'C'. Soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations respectives des côtés BC, AC, AB;

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

les équations respectives des côtés B'C', A'C', A'B'.

Si l'on a les trois relations

$$a\alpha + a'\alpha' = b\beta + b'\beta' = c\gamma + c'\gamma' = 0,$$

les intersections AB, A'B'; BC, B'C'; AC, A'C' sont en ligne droite. On en déduit que les droites AA', BB', CC' passent par le même point, et réciproquement.

Si les trois perpendiculaires abaissées de A sur B'C', de B sur A'C', de C sur A'B' se coupent en un même point, les trois perpendiculaires abaissées de A' sur BC, de B' sur AC; de C' sur BC se coupent aussi en un même point.

*Cercle.*

8. THÉORÈME. Soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations des trois côtés du triangle ABC, le cercle circonscrit a pour équation

$$\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = 0.$$



*Démonstration.*

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$$

est l'équation d'une conique passant par les trois sommets A, B, C, et remplaçant  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  par les équations que ces lettres représentent, on trouve, pour que la conique représente un cercle,

$$l = \sin A, \quad m = \sin B, \quad n = \sin C.$$

*Observation.*  $\alpha_1\beta_1 \sin C + \beta_1\gamma_1 \sin A + \gamma_1 \sin A'$  est le double de l'aire du triangle ayant pour sommets les pieds des trois perpendiculaires abaissées du point  $x_1, y_1$  sur les trois côtés du triangle; l'équation exprime que cette aire s'annule lorsque le point  $x_1, y_1$  est sur la circonférence, c'est-à-dire que les trois pieds sont en ligne droite.

9. L'équation du cercle étant

$$\gamma(\beta \sin A + \alpha \sin B) + \alpha\beta \sin C = 0,$$

montre que la droite

$$\beta \sin A + \alpha \sin B = 0$$

touche le cercle au point C; de même

$$\beta \sin C + \gamma \sin B = 0$$

touche le cercle au point A;

$$\gamma \sin A + \alpha \sin C = 0$$

touche le cercle au point B.

Ces équations montrent intuitivement que les points où les tangentes rencontrent les côtés respectivement opposés du triangle ABC sont en ligne droite.

10. *Lemme.* Soit un triangle formé par deux tangentes à un cercle et par la corde qui joint les points de contact; la distance de chaque point du cercle à la corde est une moyenne proportionnelle géométrique entre le

rectangle des distances du même point aux deux tangentes.

**11. THÉORÈME.** *Le cercle inscrit au triangle ABC a pour équation*

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A + \beta^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} B + \gamma^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} C = 0.$$

*Démonstration.* Soient  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les sommets des points de contact situés respectivement sur les côtés  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ , et

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

les équations des côtés  $B'C'$ ,  $A'C'$ ,  $A'B'$ ; l'équation du cercle inscrit à  $ABC$ , mais circonscrit à  $A'B'C'$ , est

$$\alpha' \beta' \sin C' + \beta' \gamma' \sin A' + \gamma' \alpha' \sin B' = 0.$$

Or, d'après le lemme,

$$\alpha'^2 = \beta\gamma, \quad \beta'^2 = \gamma\alpha, \quad \gamma'^2 = \alpha\beta$$

et

$$C' = 90^\circ - \frac{1}{2}C, \quad A' = 90^\circ - \frac{1}{2}A \quad \text{et} \quad B' = 90^\circ - \frac{1}{2}B;$$

donc l'équation du cercle inscrit est

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A + \beta^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} B + \gamma^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} C = 0.$$

*Observation.* L'équation d'une conique inscrite dans le triangle  $ABC$  est en général

$$l^2 \alpha^2 + m^2 \beta^2 + n^2 \gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\alpha\gamma - 2ml\alpha\beta = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(l\alpha)^{\frac{1}{2}} + (m\beta)^{\frac{1}{2}} + (n\gamma)^{\frac{1}{2}} = 0;$$

pour le cercle inscrit, on a

$$l = \cos^2 \frac{1}{2} A, \quad m = \cos^2 \frac{1}{2} B, \quad n = \cos^2 \frac{1}{2} C.$$

Nous reviendrons souvent sur cet ouvrage *hors ligne* qui est devenu classique en Angleterre et qui mérite cette distinction partout. Un éditeur intelligent rendrait service au pays par l'importation d'un produit qui nous manque complètement, et, hâtons-nous de le dire, un produit qui n'est pas contraire aux Programmes.

---

---