

O. SCHLOMILCH

**Nouvelles formules pour la détermination
indépendante des coefficients dans la série
des sécantes et la série des tangentes
et nombres bernoulliens**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 27-33

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__27_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES FORMULES

pour la détermination indépendante des coefficients dans la série des sécantes
et la série des tangentes et nombres bernoulliens ;

D'APRÈS M. O. SCHLOMILCH,
Professeur à Dresde.

(*Archives mathématiques de Grunert*, t. XVI, p. 411. 1851,
et *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 367.)

1. *Notations.* 1°. $n!$ produit continué 1.2.3... n

2°. $m_n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ coefficient binomial. $m_0 = 1$.

3°. $(D^n Fx)_0$ = valeur que prend la dérivée d'ordre n de $F(x)$ lorsqu'on y fait $x = 0$.

2. *Lemme.*

$$(1) \sin^k x = \frac{1}{2^{k-1}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot (2k)_k - (2k)_{k-1} \cos 2x \\ + (2k)_{k-2} \cos 4x - (2k)_{k-3} \cos 6x + \dots \end{array} \right],$$

$$D^n \cos \mu x = (-1)^n \mu^n \cos \mu x,$$

$$(D^n \cos \mu x)_0 = (-1)^n \mu^n,$$

$$(2) (D^n \sin^k x)_0 = \frac{(-1)^n}{2^{k-1}} \left[\begin{array}{l} -(2k)_{k-1} 2^{2n} + (2k)_{k-3} 4^{2n} \\ - (2k)_{k-5} 6^{2n} + \dots \end{array} \right],$$

3. *Lemme.*

$$\sin^{2k-1} x = \frac{1}{2^{k-2}} \left[\begin{array}{l} (2k-1)_{k-1} \sin x - (2k-1)_{k-3} \sin 3x \\ + (2k-1)_{k-5} \sin 5x - \dots \end{array} \right],$$

d'où

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (D^{2n-1} \sin^{2k-1} x)_0 \\ = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{k-2}} \left[\begin{array}{l} (2k-1)_{k-1} 1^{2n-1} - (2k-1)_{k-3} \cdot 3^{2n-1} \\ + (2k-1)_{k-5} \cdot 5^{2n-1} - \dots \end{array} \right] \end{array} \right.$$

4. *Lemme.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Sécante.

5 Soit

$$\sec x = 1 + \frac{T_2}{2!} x^2 + \frac{T_4}{4!} x^4 + \dots + \frac{T_{2n}}{2n!} x^{2n} + \dots,$$

d'où

$$T_{2n} = (D^{2n} \sec x)_0 :$$

or

$$\begin{aligned} \sec x &= (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 x + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \sin^{2n} x \right] \\ &+ \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n+1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n+2} \sin^{2n+2} x + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dans la seconde partie entre parenthèses, remplaçons $\sin x$ par sa valeur en x (*lemme 4*), on aura une série de cette forme

$$a_0 x^{2n+2} + a_2 x^{2n+4} + a_4 x^{2n+6} + \dots = S(x)$$

et

$$[D^{2n} S(x)]_0 = 0;$$

donc

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \frac{1}{2} (D^{2n} \sin^2 x)_0 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (D^{2n} \sin^4 x)_0 + \dots \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 5 \cdot 6 \dots 2n} (D^{2n} \sin^{2n} x)_0. \end{aligned}$$

Faisant donc dans la formule (2) (*lemme 2*) k successivement égal à $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, on obtient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{2n} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^1} [2_0 \cdot 2^{2n}] \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{2^3} [4_1 \cdot 2^{2n} - 4_0 \cdot 4^{2n}] \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{2^5} [6_2 \cdot 2^{2n} - 6_1 \cdot 4^{2n} + 6_0 \cdot 6^{2n}] \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} \\ &\times \left[\begin{aligned} &[(2n)_{n-1} \cdot 2^{2n} - (2n)_{n-2} \cdot 4^{2n} \dots] \\ &\pm (2n)_0 (2n)^{2n} \end{aligned} \right]. \end{aligned} \right.$$

(30)

Pour $n = 3$, on trouve

$$\begin{aligned} T_6 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2!} [2^6] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{2^3} [4 \cdot 2^6 - 4^6] \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{2^5} [15 \cdot 2^6 - 6 \cdot 4^6 + 6^6] \\ &= 16 - 180 + 225 = 61. \end{aligned}$$

Tangente.

6. Soit

$$\text{tang } x = x + \frac{T_3 x^3}{3!} + \frac{T_5 x^5}{5!} + \dots + \frac{T_{2n-1}}{2n-1!} x^{2n-1},$$

d'où

$$T_{2n-1} = (D^{2n-1} \text{ tang } x)_0.$$

Lorsque

$$\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{tang } x &= \sin x (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[\begin{aligned} &\sin x + \frac{1}{2} \sin^3 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^5 x \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{2 \cdot 4 \dots 2n-2} \sin^{2n-1} x \end{aligned} \right] \\ &\quad + \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \sin^{2n+1} x + \dots \right]; \end{aligned}$$

on démontre comme ci-dessus qu'on a

$$\begin{aligned} T_{2n-1} &= [D^{2n-1} \sin x]_0 + \frac{1}{2} [D^{2n-1} \sin^3 x]_0 \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} [D^{2n-1} \sin^5 x]_0 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n-2} [D^{2n-1} \sin^{2n-1} x]_0. \end{aligned}$$

(31)

Le reste s'annule; donc, d'après la formule (3),

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n+1} T_{2n-1} = 1_0 \cdot 1^{2n-1} \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} [3_1 \cdot 1^{2n-1} - 3_0 \cdot 3^{2n-1}] \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^4} [5_2 \cdot 1^{2n-1} - 5_1 \cdot 3^{2n-1} + 5_0 \cdot 5^{2n-1} + \dots] \\ + \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{2 \cdot 4 \dots 2n-2} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \\ \times \left[\pm (2n-1)_{n-1} \cdot 1^{2n-1} - (2n-1)_{n-1} \cdot 3^{2n-1} \dots \right]. \end{array} \right.$$

Faisant successivement $n = 1, 2, 3, 4$, on a

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 2, \quad T_3 = 16, \quad T_4 = 272 \dots$$

Sécante et tangente, formule unique.

7. Il s'agit de trouver une seule formule qui donne à la fois T_{2n} et T_{2n-1} ; on a

$$\begin{aligned} \sec x + \tan x &= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right) \\ &= T_0 + T_1 x + \frac{T_2}{2!} x^2 + \frac{T_3}{3!} x^3 + \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$T_m = \left[D^m \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right) \right]_0.$$

Lorsque $x < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right) &= \cos x (1 - \sin x) \\ &= \left(\begin{array}{l} \cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x \cos x \\ + \sin^m x \cos x \\ + (\sin^{m+1} x \cos x + \sin^{m+2} x \cos x + \dots) \end{array} \right) \end{aligned}$$

On prouve comme ci-dessus qu'on a seulement

$$T_m = (D^m \cos x)_0 + (D^m \sin x \cos x)_0 + (D^m \sin^2 x \cos x)_0 + \dots \\ + (D^m \sin^m x \cos x)_0,$$

$$D^m (\sin^k x \cos x) = \frac{1}{k+1} D^{m+1} \sin^{k+1} x,$$

donc

$$T_m = \frac{1}{1} (D^{m+1} \sin x)_0 + \frac{1}{2} (D^{m+1} \sin^2 x)_0 \\ + \frac{1}{m+1} (D^{m+1} \sin^{m+1} x)_0.$$

Ayant égard aux formules (2) et (3), on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n T_{2n} \\ = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} [3_1 \cdot 1^{2n+1} - 3_0 \cdot 3^{2n+1}] \\ + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} [5_1 \cdot 1^{2n+1} - 5_1 \cdot 3^{2n+1} + 5_0 \cdot 5^{2n+1}] \\ + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \left[\begin{array}{l} (2n+1)_n \cdot 1^{2n+1} \\ - (2n+1)_{n-1} \cdot 3^{2n+1} + \dots \\ \pm (2n+1)_0 \cdot (2n+1)^{2n+1} \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n+1} T_{0n-1} \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^1} [2_0 \cdot 2^{2n}] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} [4_1 \cdot 2^{2n} - 4_0 \cdot 4^{2n}] \\ + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^3} [6_2 \cdot 2^{2n} - 6_1 \cdot 4^{2n} + 6_0 \cdot 6^{2n}] + \dots \\ + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left[\begin{array}{l} (2n)_{n-1} \cdot 2^{2n} - (2n)_{n-2} \cdot 4^{2n} + \dots \\ \pm (2n)_0 \cdot (2n)^{2n} \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

En faisant dans cette dernière formule $n = 3$, on a

$$T. = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [2^6] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} [4 \cdot 2^6 - 4^6] + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^3} \left[-6 \cdot 4^6 + 6^6 \right] \\ = 16 - 120 + 120 = 16, \text{ comme ci-dessus.}$$

Formules récurrentes.

8.

$$(8) \quad m_0 T_m - m_1 T_{m-1} + m_2 T_{m-2} - m_3 T_{m-3} + \dots = \sin \frac{m\pi}{2},$$

$$(9) \quad T_{m+1} = m_0 T_0 T_m + m_1 T_1 T_{m-1} + m_2 T_2 T_{m-2} + \dots$$

à démontrer.

Nombres bernoulliens (Jacques Bernoulli).

9. B_p désignant un nombre bernoullien, on sait que l'on a

$$B_{2n} = T_{2n}, \quad \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{2n} B_{2n-1} = T_{2n-1}.$$

Les formules (4), (5), (6), (7), (8), (9) s'appliquent donc aussi aux nombres bernoulliens (voir Lacroix, *Calcul différentiel*, tome III, p. 84 et 106; 1819).