MOREAU

Solution de la question 332

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 26-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__26_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 332

(voir tome XV, p. 243)

PAR M. MOREAU,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Soit

$$X = MN^k,$$

M et N sont des fonctions algébriques entières de x n'ayant pas de facteurs communs *ni multiples* (*). k est un nombre entier positif. Désignons par P le plus grand commun diviseur de X et de $\frac{dX}{dx}$, faisons

$$Q = \frac{X}{P}, \quad R = \frac{dX}{P\,dx},$$

alors N est le plus grand commun diviseur de Q et de $R - k\frac{dQ}{dx}$.

En effet, on a

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dM}{dx}N^k + kMN^{k-1}\frac{dN}{dx}$$

ou bien

$$\frac{dX}{dx} = N^{k-1}\left(\frac{dM}{dx}N + k\frac{dN}{dx}M\right).$$

Le plus grand commun diviseur de X et de sa dérivée est N^{k-1}, car, d'après les conditions de l'énoncé, MN et $\frac{dM}{dx}N + k\frac{dN}{dx}M$ n'ont pas de facteurs communs.

(*) Je crois que cette condition est nécessaire pour la démonstration.

Ainsi

$$P = N^{k-1}$$

Maintenant on a

$$Q = MN, \quad R = \frac{dM}{dx} N + k \frac{dN}{dx} M,$$

et

$$R - k \frac{dQ}{dx} = \frac{dM}{dx} N + k \frac{dN}{dx} M - k \left(\frac{dM}{dx} N + \frac{dN}{dx} M \right)$$

$$= (1 - k) \frac{dM}{dx} N.$$

Le plus grand commun diviseur de

$$Q = MN$$

et de

$$R - k \frac{dQ}{dx} = (1 - k) \frac{dM}{dx} N$$

est donc N.