

BRIOSCHI

**Sur l'hexagone inscriptible dans une
conique, et solution de la question
369 (voir page 251)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 269-272

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__269_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'HEXAGONE INSCRIPTIBLE DANS UNE CONIQUE

Et solution de la question 369

(voir page 281) ;

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Soit l'hexagone 123456.

$r = 0$ équation du côté 12

$s = 0$ — 34

$t = 0$ — 56

(270)

$$\beta r + \alpha s + t = 0 \text{ équation du côté } 23$$

$$r + \gamma s + \beta t = 0 \quad - \quad 45$$

$$\gamma r + s + \alpha t = 0 \quad - \quad 61$$

Si ces relations subsistent, l'hexagone est inscriptible dans la conique ayant pour équation

$$r^2 + s^2 + t^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) st + \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) tr + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) rs = 0;$$

les équations des diagonales sont

$$(13) \quad \alpha \beta r + s + \alpha t = 0,$$

$$(24) \quad r + \alpha \beta s + \beta t = 0,$$

$$(35) \quad \beta r + \beta \gamma s + t = 0;$$

$$(14) \quad \alpha r + \beta s + \alpha \beta t = 0,$$

$$(25) \quad \alpha r + \alpha \gamma s + \gamma t = 0,$$

$$(36) \quad \beta \gamma r + \beta s + \gamma t = 0;$$

$$(15) \quad r + \gamma s + \alpha \gamma t = 0,$$

$$(26) \quad \alpha \gamma r + \alpha s + t = 0,$$

$$(46) \quad \gamma r + s + \beta \gamma t = 0.$$

Soient

A l'intersection des côtés (34) et (56),

B — (12) et (56),

C — (34) et (12);

le point A étant déterminé par les équations

$$s = 0, \quad t = 0,$$

l'équation de la droite A 1 est de la forme

$$s + kt = 0;$$

mais le point (1) est déterminé par les équations

$$(12) \quad r = 0,$$

$$(16) \quad \gamma r + s + \alpha t = 0;$$

par conséquent,

$$k = \alpha;$$

on aura aussi

$$(A_1) \quad s + \alpha t = 0,$$

$$(A_2) \quad t + \alpha s = 0,$$

$$(B_3) \quad t + \beta r = 0,$$

$$(B_4) \quad r + \beta t = 0,$$

$$(C_5) \quad r + \gamma s = 0,$$

$$(C_6) \quad s + \gamma r = 0.$$

Soient les trois droites

$$s - t = 0, \quad t - r = 0, \quad r - s = 0.$$

La première droite passe par le point A et rencontre BC en a .

La deuxième droite passe par le point B et rencontre AC en b .

La troisième droite passe par le point C et rencontre AB en C.

Et les trois droites se coupent en un même point.

On en déduit que les cinq droites :

AB, AC, Aa, A₁, A₂ sont en involution, Aa est la droite double.

BC, BA, Bb, B₃, B₄ sont en involution, Bb est la droite double.

CA, CB, Cc, C₅, C₆ sont en involution, Cc est la droite double.

Si l'on suppose $\alpha\beta\gamma = 1$,

Les trois équations ci-dessus (13), (35), (15) se réduisent à la première, savoir

$$(1) \quad \alpha\beta r + s + \alpha t = \alpha,$$

c'est-à-dire les points 1, 3, 5 sont sur la même droite donnée par l'équation (1); de même les points 2, 4, 6

sont sur la même droite donnée par l'équation

$$(2) \quad r + \alpha\beta s + \beta t = 0,$$

de sorte que l'hexagone est inscrit entre les deux droites (1) et (2), et l'équation de la conique se réduit au produit (1) (2) = 0; les équations (1) et (2) sont celles des deux droites R et S du problème Cayley.
