

## **Propriétés générales des surfaces et des lignes, plans polaires et droites polaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1857), p. 266-269

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_266\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__266_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES ET DES LIGNES,  
PLANS POLAIRES ET DROITES POLAIRES**

(voir t. XI, p. 195; t. XII, p. 272, et t. XIV, p. 111).

---

1. *Notations.* Représentons les trois coordonnées d'un point dans l'espace par  $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ , ce qui permet de rendre *homogènes* les équations des surfaces. Quand on dit qu'un point a pour coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , il faut sous-entendre  $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ . Dans le résultat final d'une opération, on fait  $x_4 = 1$ ; on revient alors aux coordon-

nées ordinaires. Les avantages de cette notation consistent dans la forme symétrique des résultats, si favorable à la mémoire, et ensuite dans la facilité d'appliquer aux équations les propriétés des fonctions homogènes.

Soit

$$u = 0$$

l'équation rendue homogène d'une surface de degré  $n$ , de sorte que  $u$  est une fonction de  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , coordonnées de la surface dont chaque terme est de degré  $n$ ;  $U$  est la même fonction en  $X_1, X_2, X_3, X_4$  coordonnées d'un point *quelconque* de l'espace.

$u_{x_1}^{(p)}, u_{x_2}^{(p)}, u_{x_3}^{(p)}, u_{x_4}^{(p)}$  sont les dérivées d'ordre  $p$  de la fonction  $u$ , prises respectivement par rapport à  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ; de même  $U_{X_1}^{(p)}, U_{X_2}^{(p)}, U_{X_3}^{(p)}, U_{X_4}^{(p)}$ .

2. *Plans polaires.*  $u = 0$  étant une équation homogène d'une surface de degré  $n$ , l'équation

$$x_1 U_{X_1}^{(p)} + x_2 U_{X_2}^{(p)} + x_3 U_{X_3}^{(p)} + x_4 U_{X_4}^{(p)} = 0$$

est l'équation du *plan polaire* d'ordre  $p$  du point  $X_1, X_2, X_3, X_4$  désigné comme pôle;  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont les coordonnées courantes du plan.

3. THÉORÈME. *Étant données trois surfaces de degré  $n, n_1, n_2$ , le lieu du pôle dont les trois plans polaires correspondants d'ordre  $p$  passent par la même droite est une surface de degré  $n + n_1 + n_2 - 3p$ .*

*Démonstration.* Soient

$$\begin{array}{lll} u = 0 & \text{l'équation de la surface de degré } n, & \\ v = 0 & \text{---} & n_1, \\ w = 0 & \text{---} & n_2, \end{array}$$

on aura

$$x_1 U_{X_1}^{(p)} + x_2 U_{X_2}^{(p)} + x_3 U_{X_3}^{(p)} + x_4 U_{X_4}^{(p)} = 0,$$

équation du plan polaire relative à  $u = 0$ ;

$$x_1 V_{X_1}^{(p)} + x_2 V_{X_2}^{(p)} + x_3 V_{X_3}^{(p)} + x_4 V_{X_4}^{(p)} = 0,$$

équation du plan polaire relative à  $\nu = 0$ ;

$$x_1 W_{X_1}^{(p)} + x_2 W_{X_2}^{(p)} + x_3 W_{X_3}^{(p)} + x_4 W_{X_4}^{(p)} = 0,$$

équation du plan polaire relative à  $w = 0$ .

Si ces trois plans passent par la même droite, les plans menés parallèlement par l'origine passent aussi par une même droite, et *vice versa*. Pour avoir les équations de ces plans parallèles, il suffit de supprimer les termes en  $X_4$ , et alors, parce que les plans passent par une même droite, le déterminant suivant doit être nul :

$$\begin{vmatrix} U_{X_1}^{(p)} & U_{X_2}^{(p)} & U_{X_3}^{(p)} \\ V_{X_1}^{(p)} & V_{X_2}^{(p)} & V_{X_3}^{(p)} \\ W_{X_1}^{(p)} & W_{X_2}^{(p)} & W_{X_3}^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu cherché; or  $U_{X_1}^{(p)}$  est de degré  $n - p$ ,  $V_{X_1}^{(p)}$  de degré  $n_1 - p$ ,  $W_{X_3}^{(p)}$  de degré  $n_2 - p$ ; donc l'équation du lieu est de degré  $n + n_1 + n_2 - 3p$ .

C. Q. F. D.

*Corollaire.* 1°. Si  $n = n_1 = n_2$ , le degré du lieu est  $3(n - p)$ .

2°. Si  $n = n_1 = n_2 = 2$  et  $p = 1$ , le lieu est du troisième degré.

*Remarque.* Le plan polaire d'ordre 1 est le lieu des centres harmoniques relatifs aux sécantes qui passent par le pôle (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 347).

4. THÉORÈME. Étant données quatre surfaces de degré  $n, n_1, n_2, n_3$ , le lieu du pôle dont les quatre plans po-

laires d'ordre  $p$  par rapport à ces surfaces passent par un même point est une surface et du degré

$$n + n_1 + n_2 + n_3 - 4p.$$

*Démonstration.* Soient

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$

les équations des quatre surfaces de degrés respectifs  $n, n_1, n_2, n_3$ ; pour que les quatre plans polaires d'ordre  $p$  passent par le même point, il faut établir la relation

$$\begin{vmatrix} U_{X_1}^{(p)} & U_{X_2}^{(p)} & U_{X_3}^{(p)} & U_{X_4}^{(p)} \\ V_{X_1}^{(p)} & V_{X_2}^{(p)} & V_{X_3}^{(p)} & V_{X_4}^{(p)} \\ W_{X_1}^{(p)} & W_{X_2}^{(p)} & W_{X_3}^{(p)} & W_{X_4}^{(p)} \\ \Phi_{X_1}^{(p)} & \Phi_{X_2}^{(p)} & \Phi_{X_3}^{(p)} & \Phi_{X_4}^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu qui est de degré

$$n + n_1 + n_2 + n_3 - 4p.$$

C. Q. F. D.

*Corollaire.* 1°. Si  $n = n_1 = n_2 = n_3$ , le degré du lieu est  $4(n - p)$ .

2°. Si  $n = n_1 = n_2 = n_3 = 2$  et  $p = 1$ , le degré est 4.