

JOSEPH SACCHI

Sur les aires des polygones inscrits ou circonscrits au cercle et à l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 259-260

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__259_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES AIRES DES POLYGOUES INSCRITS OU CIRCONSCRITS
AU CERCLE ET A L'ELLIPSE;**

PAR M. LE DOCTEUR JOSEPH SACCHI.

Soient $\varphi (h_1, h_2, \dots, h_x, \dots, h_n)$ l'aire d'un polygone inscrit ou circonscrit à un cercle ayant pour rayon l'unité en fonction des droites h_x qui le déterminent ; $l_1, l_2, \dots, l_x, \dots, l_n$ les droites analogues aux susdites et appartenant à un polygone analogue inscrit ou circonscrit à une ellipse ayant les demi-axes principaux a, b ; λ_x le demi-diamètre parallèle à l_x . L'aire A de ce dernier polygone est

$$A = ab \varphi (r_1, r_2, \dots, r_x, \dots, r_n) \quad \text{ou} \quad r_x = \frac{l_x}{\lambda_x}.$$

Les applications sont nombreuses :

1°. L'aire d'un triangle inscrit dans un cercle ayant l'unité pour rayon étant

$$\varphi = \frac{h_1 h_2 h_3}{4},$$

l'aire d'un triangle inscrit dans l'ellipse ayant les demi-axes a, b sera

$$A = \frac{ab}{4} r_1 r_2 r_3,$$

c'est la formule de Mac-Cullagh ; et comme l'on a aussi

$$\varphi = \sqrt{s(s-h_1)(s-h_2)(s-h_3)}$$

ou

$$2s = h_1 + h_2 + h_3,$$

ainsi l'on aura

$$A = ab \sqrt{t(t-r_1)(t-r_2)(t-r_3)}$$

ou

$$2t = r_1 + r_2 + r_3,$$

formule qui est due à mon ami le D^r Brioschi (*Teorica dei determinanti*, p. 28; *Sopra alcuni teoremi di geometria*, *Annali del Sig. Tortolini*, 1853).

2°. Pour le triangle circonscrit au cercle, on a

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2},$$

par conséquent, pour le triangle circonscrit à l'ellipse on aura

$$A = \frac{ab}{2} (r_1 + r_2 + r_3),$$

formule plus simple que celle qui a été trouvée par le D^r Brioschi, *loco citato*.

Ainsi les aires φ_1 , φ_2 , φ_3 d'un quadrilatère inscrit, ou circonscrit à un cercle, inscrit et circonscrit simultanément à deux cercles étant

$$\varphi_1 = \sqrt{(s - h_1)(s - h_2)(s - h_3)(s - h_4)},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(dd_0)^2 - (h_1 h_3 - h_2 h_4)^2},$$

$$\varphi_3 = \sqrt{h_1 h_2 h_3 h_4}$$

où

$$2s = h_1 + h_2 + h_3 + h_4,$$

et d , d_0 sont les deux diagonales, on aura les aires d'un quadrilatère inscrit, circonscrit dans l'ellipse, inscrit dans l'ellipse des demi-axes ab et circonscrit à un autre qui est concentrique et homothétique à la première ainsi représentées

$$A_1 = ab \sqrt{(t - r_1)(t - r_2)(t - r_3)(t - r_4)},$$

$$A_2 = \frac{ab}{2} \sqrt{(rr_0)^2 - (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2},$$

$$A_3 = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}$$

où

$$2t = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$