G. FORESTIER

Solution de la question 546

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 19-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__19_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 346

(voir tome XV, page 387),

PAR M. G. FORESTIER,
Élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
(classe de M. Briot)

Soient a, b, c,..., f, n arcs du premier quadrant; je supposerai que a est le plus grand de ces arcs et que f est le plus petit. Nous avons

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c + \ldots + \sin f}{\cos a + \cos b + \cos c + \ldots + \cos f} = q,$$

et nous voulons démontrer que l'on a

$$\tang f < q < \tang a.$$

Or, dans le premier quadrant, le sinus du plus grand arc est le plus grand sinus et son cosinus est le plus petit. Par conséquent, en remplaçant au numérateur chaque sinus par $\sin a$ et au dénominateur chaque cosinus par $\cos a$, nous augmentons la valeur de la fraction et nous avons

$$\frac{n \sin a}{n \cos a} > q$$

ou

$$\tang a > q.$$

De même, en remplaçant chaque sinus par sinus f et chaque cosinus par $\cos f$, on diminue la valeur de la fraction, et l'on a

$$\frac{n \sin f}{n \cos f} < q \quad \text{ou} \quad \tang f < q,$$

par suite,

$$\tang f < q < \tang a.$$

C. Q. F. D.

C'est aussi un cas particulier de ce théorème général : $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ étant n expressions fractionnaires écrites suivant un ordre de grandeur croissante, l'expression $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ est comprise entre $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_n}{b_n}$.