NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MANNHEIM

Solution de la question 366

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 187-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__187_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 366 (*)

(voir p. 126);

PAR M. MANNHEIM.

Soit C le point de rencontre des droites M, N. Je circonscris la circonférence O au triangle ABC. Du point C comme centre, je décris une circonférence tangente à la circonférence O; soit D le point de contact. Lorsque la circonférence O roule dans l'intérieur de la circonférence C, les points A et B décrivent les droites M et N, je dis qu'un point quelconque du plan de la circonférence O décrit une ellipse. (Le point O seul décrit une circonférence.)

En effet, je joins ce point au centre O, cette droite coupe la circonférence O en deux points qui décrivent des droites perpendiculaires entre elles; le lieu cherché est donc celui d'un point d'une droite de longueur constante dont les extrémités parcourent des droites perpendiculaires entre elles. Donc, etc. (D'où l'on déduit très-facilement la construction que j'ai donnée, tome IX, page 419.)

Ce que je viens de dire suffit pour la première et la seconde partie de la question 366. Je passe à la troisième partie. Soit E le centre du segment capable de l'angle

(*) On est prié de faire la figure.

donné, ce point décrit une ellipse dont la normale au point E est ED. Cette droite coupe la circonférence E aux points où cette courbe touche son enveloppe (théorème de Descartes).

D'après cela, l'enveloppe est le lieu des extrémités d'une droite de longueur constante qui se meut en restant constamment normale à une ellipse fixe. On peut dire aussi que cette enveloppe se compose de deux développantes de la développée de l'ellipse.

Il est facile de voir que la projection du foyer de l'ellipse sur les tangentes à cette courbe est une conchoïde du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, le foyer étant le pôle de cette conchoïde.

Pour la quatrième partie, je ferai remarquer que sur une droite AB, on peut décrire deux segments capables d'un angle donné : l'un fait partie de la circonférence O dont les points décrivent des droites et dont l'enveloppe se compose de la circonférence C et de son centre, l'autre ne conduit à rien d'intéressant.

Ce qui suit n'est pas proposé dans la question 366.

Soit G un point quelconque de AB. Je mène DG qui coupe la circonférence O au point H. Je puis considérer G comme faisant partie d'une droite DH dont les extrémités décrivent la droite CH et le diamètre CD.

CH étant perpendiculaire sur DG normale à l'ellipse décrite par le point G, est la direction conjuguée du diamètre CG. Lorsque DH prend la direction CH, le point G vient en G′ et l'on a CG′ = DG; DG est donc la longueur du demi-diamètre conjugué de CG.

De là la construction suivante qui donne en grandeur et en direction les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.

CG et CG′ étant les demi-diamètres conjugués donnés, du point G j'abaisse sur CG′ la perpendiculaire GH que je prolonge dans le sens HG d'une longueur GD égale à CG'. Sur CD comme diamètre, je décris la circonférence O, je mène le diamètre GO; les distances du point G aux extrémités de ce diamètre sont les demi-axes de l'ellipse, et les droites qui vont du point C à ces mêmes extrémités déterminent la direction des axes.

Dans un prochain article, je donnerai de cette construction une démonstration géométrique fondée sur les projections, je montrerai aussi comment on peut en déduire la construction connue de M. Chasles.

Note du Rédacteur. M. Breton (de Champ) fait observer qu'il a déjà traité cette question d'une manière complète et géométriquement dans les *Nouvelles Annales* (t. V, p. 591-599); qu'on trouve dans le même recueil une solution analytique (t. IV, p. 186 et 191). Cela n'a pas empêché qu'on ne se soit donné la peine de *redécouvrir* une partie de cette théorie dans le *Journal de* M. Liouville (t. XIV, p. 417) et dans le XXXVI[e] cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Note sur des théorèmes de Schooten et de La Hire. *Beati qui nihil legunt: omnia invenient.*