

E. PROUHET

**Solution et généralisation de la question
365 (Sylvester)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 184-187

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__184_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION 365
(SYLVESTER)

(voir t. XVI, p. 125) ;

PAR M. E. PROUHET.

Le théorème de M. Sylvester est un cas particulier du
suivant :

Si a et b sont deux nombres entiers, b étant moindre

que a ou au plus égal à a , la partie entière de

$$(a + \sqrt{a^2 + 2b})^{2m+1}$$

est divisible par 2^{m+1} .

Je pose, pour abrégér,

$$R = a + \sqrt{a^2 + 2b}$$

et

$$R^n = A_n + B_n \sqrt{a^2 + 2b},$$

en sorte qu'on aura

$$A_1 = a, \quad B_1 = 1.$$

La partie entière de R étant $2a$, on voit que le théorème est vrai pour $m = 0$. Sa vérité, dans tous les cas, résulte des théorèmes suivants :

THÉORÈME I. *Si A_{2m+1} et B_{2m+1} sont divisibles par 2^k , A_{2m+3} et B_{2m+3} seront divisibles par 2^{k+1} .*

En effet, on a

$$R^{2m+1} \cdot R^2 = R^{2m+3}$$

$$= (A_{2m+1} + B_{2m+1} \sqrt{a^2 + 2b}) (2a^2 + 2b + 2a \sqrt{a^2 + 2b}),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2 + 2b) A_{2m+1} + 2a(a^2 + 2b) B_{2m+1},$$

$$B_{2m+3} = 2a A_{2m+1} + (2a^2 + 2b) B_{2m+1},$$

égalités qui rendent la conclusion évidente.

Corollaire. A_1 et B_1 sont divisibles par 2 : donc A_{2m+1} et B_{2m+1} sont divisibles par 2^m .

THÉORÈME II. *La partie entière de R^{2m+1} est $2A_{2m+1}$.*

En effet, R étant racine de l'équation

$$(1) \quad x^2 - 2ax - 2b = 0,$$

R^{2m+1} sera racine de l'équation

$$(2) \quad x^2 - 2A_{2m+1}x - 2^{2m+1}b^{2m+1} = 0,$$

car la somme des $(2m+1)^{ième}$ puissances des racines de

l'équation (1) est $2A_{2m+1}$, et le produit de ces puissances est $-(2b)^{2m+1}$.

En résolvant l'équation (2), on aura

$$R^{2m+1} = A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}.$$

Il faut donc démontrer que l'on a en général

$$2^{2m+1} b^{2m+1} \leq 2A_{2m+1}.$$

Cette inégalité est déjà vérifiée pour $m = 0$, et nous allons faire voir que si elle a lieu jusqu'à un certain nombre m , elle aura encore lieu pour $m + 1$.

En effet, on a

$$R^{2m+3}$$

$$= (A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}})(2a^2 + 2b + 2a\sqrt{a^2 + 2b}),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2 + 2b)A_{2m+1} + 2a\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}\sqrt{a^2 + 2b},$$

valeur rationnelle malgré sa forme, car

$$\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}} = B_{2m+1} \sqrt{a^2 + 2b} :$$

il en résulte

$$\begin{aligned} A_{2m+3} &> (2a^2 + 2b)A_{2m+1} + 2a^2 A_{2m+1} \\ &> (2a^2 + b)2A_{2m+1}. \end{aligned}$$

Cette inégalité ne sera pas troublée si l'on remplace dans le second membre $2A_{2m+1}$ par $2^{2m+1} b^{2m+1}$, quantité qui est plus petite par hypothèse, et $2a^2 + b$ par $2b^2$. On aura donc

$$A_{2m+3} > 2^{2m+2} b^{2m+3},$$

ou

$$2A_{2m+3} > 2^{2m+3} b^{2m+3}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. A_{2m+1} étant divisible par 2^m (corollaire du théorème I^{er}), il en résulte que $2A_{2m+1}$ est divisible par

2^{m+1} . Donc la partie entière de $R_{2^{m+1}}$ est divisible par 2^{m+1} , ce qui est le théorème de M. Sylvester généralisé.

On peut compléter l'énoncé du théorème en ajoutant que la valeur entière la plus approchée *par excès* de R^{2^m} est divisible par 2^m .