

## Questions

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1857), p. 178-184

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_178\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__178_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

 QUESTIONS.
 

---

372. Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le *degré* de l'enveloppe de la droite qui renferme ces trois points.

373. Soit une équation algébrique à coefficients entiers et le premier terme ayant pour coefficient l'unité; si les modules de toutes les racines sont égaux à l'unité, toutes les racines de l'équation sont des racines de l'unité.

(HERMITE.)

374. Soient

$$(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma'), \quad \lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

les coordonnées de deux points et l'équation d'une droite situés dans le même plan. Posons

$$u = \begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma \\ a, b, c \end{vmatrix} \quad v = s \begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \end{vmatrix} \quad w = \begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ a, b, c \end{vmatrix}$$

$uw - v^2 = 0$  est l'équation d'une conique qui passe par les deux points et touche la droite;  $a, b, c, s$  sont des constantes arbitraires. (CAYLEY.)

*Observation.* On fait usage ici de la notation de Hesse; les coordonnées d'un point dans un plan sont exprimées par les formes  $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ ; on revient à la notation vulgaire en faisant

$$\gamma = 1, \quad z = 1;$$

dans l'équation  $\nu$ , la constante  $s$  multiplie le déterminant.

375. Deux cercles concentriques ayant pour rayons  $r$  et  $r\sqrt{-1}$  se coupent à angle droit. Démontrer et expliquer ce résultat d'apparence paradoxale.

376. Sur toute surface du troisième degré, on peut trouver vingt-sept droites.

377. Soient  $AA_1, BB_1, CC_1$  les trois perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle  $ABC$  respectivement sur les côtés opposés; considérons le triangle  $A_1, B_1, C_1$ ; soient  $A_2$  le point où  $B_1 C_1$  coupe  $AA_1$ ;  $B_2$  le point où  $A_1 C_1$  coupe  $BB_1$ ,  $C_2$  le point où  $A_1 B_1$  coupe  $CC_1$ ; considérons le triangle  $A_2 B_2 C_2$ ; soient  $A_3$  l'intersection de  $B_2 C_2$  avec  $AA_1$ ;  $B_3$  l'intersection de  $A_2 C_2$  avec  $BB_1$ , et  $C_3$  l'intersection  $A_2 B_2$  avec  $CC_1$ ; et ainsi de suite.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

étant les équations des côtés  $BC, AC, AB$  du triangle, l'équation de  $A_n B_n$  sera

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0$$

ou

$$m_n = \frac{m_{n-1} + 2}{m_{n-1}}, \quad m_{n-1} = \frac{m_{n-2} + 2}{m_{n-2}}, \dots, \quad m_2 = \frac{m_1 + 2}{m_1},$$

$$m_1 = 1,$$

d'où

$$m_{2n} = \frac{2^{2n+1} + 1}{2^{2n} - 1}, \quad m_{2n+1} = \frac{2^{2n+2} - 1}{2^{2n+1} + 1};$$

l'équation de  $A_\infty B_\infty$  est donc

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 2 \gamma \cos C = 0;$$

de même pour les côtés  $B_n C_n, A_n C_n$ .

1°. La droite  $AA_1$  bissecte l'angle  $B_n A_n C_n$ ; de même les droites  $BB_1, CC_1$ .

2°. Toutes les droites  $A_n B_n$  passent par le même point;

de même les droites  $A_n C_n, B_n C_n$ ; et ces trois points sont sur une même droite.

(E. HARRISON, B. A. Trin. Coll. Cambr.)

378. Deux droites fixes  $A, A'$  et deux points fixes  $o, o'$  sont donnés dans un même plan. Une molécule  $M$  parcourt la première droite avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a + bt,$$

et une molécule  $M'$  parcourt la seconde droite  $A'$  avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a' + b' t;$$

$e$  désigne l'espace,  $t$  le temps et  $a, b, a', b'$  sont des constantes données.  $S$  et  $S'$  étant deux positions *simultanées* des deux molécules, on demande : 1° de trouver l'équation du lieu géométrique de l'intersection des deux droites  $oS, o'S'$ ; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite  $SS'$ ; 3° de démontrer qu'il existe une relation *homographique* entre les points  $S$  et  $S'$ .

379. Mêmes données géométriques; le mouvement du point  $M$  est donné par l'équation

$$e = at$$

et celui du point  $M'$  par

$$et = a';$$

on demande de trouver : 1° l'équation du lieu géométrique de l'intersection des droites  $oS, o'S'$ ; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite  $SS'$ ; 3° de démontrer qu'il existe entre les points  $S$  et  $S'$  une relation d'*involution*.

380. Soient donnés un angle trièdre trirectangle de sommet  $S$  et un point quelconque  $O$  par lequel on mène un plan  $P$  coupant les faces de l'angle suivant  $ABC$ ; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point  $O$  partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois

triangles;  $p, p', p''$  étant les aires des parallélogrammes, on a

$$\frac{1}{p^2 \sin^2(\text{SA}, \text{P})} + \frac{1}{p'^2 \sin^2(\text{SB}, \text{P})} + \frac{1}{p''^2 \sin^2(\text{SC}, \text{P})} \\ = \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} \right)^2 \frac{1}{\sin^2(\text{SO}, \text{P})};$$

(SA, P) est l'angle de la droite SA et du plan P,  $p$  est l'aire du parallélogramme ayant l'un de ses sommets en A; de même  $p'$  a un sommet en B et  $p''$  en C.

Lorsque le point O est extérieur au triangle ABC, il y a un changement de signes à faire dans le second membre.

(MANNHEIM.)

381. Représentons par  $\Sigma p$  la somme de tous les diviseurs de  $p$ , l'unité et  $p$  compris. Soient  $1, d_1, d_2, d_3, \dots, m$  tous les diviseurs du nombre  $m$ . Faisons

$$\frac{m}{1} = m, \quad \frac{m}{d_1} = \delta_1, \quad \frac{m}{d_2} = \delta_2, \quad \frac{m}{d_3} = \delta_3, \dots, \quad \frac{m}{m} = 1;$$

on aura cette identité

$$\Sigma 1 + d_1 \Sigma d_1 + d_2 \Sigma d_2 + d_3 \Sigma d_3 + \dots + m \Sigma m \\ = \frac{m^2}{1} \Sigma 1 + (\delta_1)^2 \Sigma d_1 + (\delta_2)^2 \Sigma d_2 + (\delta_3)^2 \Sigma d_3 + \dots + 1 \Sigma m$$

où  $\Sigma 1 = 1$ .

*Exemple.*

$$m = 6, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \\ \Sigma d_1 = 3, \quad \Sigma d_2 = 4, \quad \Sigma 6 = 12, \\ \delta_1 = 3, \quad \delta_2 = 2,$$

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 12 = 36 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 12 = 91;$$

l'identité peut s'écrire ainsi d'une manière abrégée

$$\Sigma (d \Sigma d) = \Sigma (\delta^2 \Sigma d).$$

(J. LIOUVILLE.)

382. Soit  $f(x)$  une fonction algébrique de  $x$  et soient  $1, d_1, d_2, d_3, \dots, m$  tous les diviseurs de  $m$ . Remplaçant

$x$  par tous ces diviseurs, posons

$$f(1) + f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(m) = F(m).$$

Soient parmi ces diviseurs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$  tous les nombres premiers facteurs de  $m$ ; on a l'identité

$$f(m) = F(m) - \Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1}\right) + \Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_2}\right) - \Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\right) + \dots$$

ou

$$\Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1}\right) = F\left(\frac{m}{\alpha_1}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_2}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_3}\right),$$

$$\Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_2}\right) = F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_2}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_3}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_2 \alpha_3}\right) + \dots$$

$$\dots \dots \dots + F\left(\frac{m}{\alpha_2 \alpha_3}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_2 \alpha_4}\right) + \dots$$

$$\Sigma F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\right) = F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\right) + F\left(\frac{m}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}\right) + \dots$$

La loi est en évidence. (J. LIOUVILLE.)

383. Soient donnés dans un même plan : 1° une courbe algébrique par une équation de degré  $n$ ; 2° un triangle dont les côtés sont donnés par les trois équations linéaires

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0;$$

d'un point quelconque  $M$  pris sur la courbe, abaissons sur les côtés du triangle  $p, q, r$  respectivement les perpendiculaires  $P, Q, R$ ; construisons une seconde courbe dont les points aient pour coordonnées  $\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}$ ; démontrer : 1° que la seconde courbe est aussi de degré  $n$ ; 2° que l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants  $M, m$  des deux courbes est de degré  $2n$ .

384. La droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ordinaire change à chaque instant de longueur et de direction : trouver l'équation de la ligne

décrite par le milieu de cette droite et la loi du mouvement.

385. Mêmes données : trouver l'équation de l'enveloppe de la droite.

386. Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être ni un carré ni le double d'un carré (\*).

(FAURE.)

387. Lorsque les coefficients de l'équation générale du quatrième degré

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

ont entre eux la relation

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'invariant cubique de la fonction du quatrième degré est nul, l'expression algébrique des racines de l'équation ne contient pas de radical cubique.

(FAURE.)

388.  $m$  droites sont données dans un plan, ainsi qu'un point A. Soient  $(a, b)$  le point d'intersection de deux quelconques de ces droites  $a, b$ , et B la droite conjuguée harmonique de la droite qui passe par A et  $(a, b)$  relativement aux deux droites  $a$  et  $b$ . Nous aurons dans le plan  $\frac{1}{2}m(m-1)$  points  $(a, b)$  et autant de droites B. On demande :

1° de démontrer que par ces  $\frac{1}{2}m(m-1)$  points on peut toujours mener une courbe de degré  $m-1$  qui touche les droites B en ces points  $(a, b)$ ; 2° donner l'équation de cette courbe; 3° appelant A la courbe ainsi construite, considérons une autre courbe B tracée au moyen d'un second point A' de la même manière que la précédente; du point A, on peut mener  $(m-1)(m-2)$  tan-

---

(\*) Le produit de tant de nombres consécutifs qu'on veut ne peut être une puissance parfaite d'aucun nombre

gentes à la courbe B, par le point A' on peut en mener autant à la courbe A : on a ainsi  $2(m-1)(m-2)$  points de contact qui sont sur une courbe de degré  $m-2$ ; 4° donner l'équation de cette courbe. (FAURE).

389. La somme des carrés des coefficients de  $(k+1)^r$ ,  $r$  étant entier positif, est égal à  $\frac{[2r]}{[r^2]}$ , les crochets désignant des produits continuels. Exemple

$$r = 3,$$

alors

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} = 20.$$

(LAGRANGE.)

390. Soit AEFD un rectangle; de F on abaisse une perpendiculaire FG sur la diagonale DE; par G on mène une parallèle au côté EF rencontrant le côté AE en C et une parallèle GB au côté DF rencontrant AD en B. Faisons

$$\begin{aligned} EF = m, \quad DF = n, \quad DE = d, \quad FG = h, \\ CG = b, \quad BG = c, \quad DG = f, \quad EG = g, \end{aligned}$$

on a

$$h^3 = bcd, \quad d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}, \quad d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

(H. MONTUCCI, professeur au lycée Saint-Louis.)