

H. ROCHETTE

Solution de la question 349

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 172-173

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__172_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 349

(voir t. XV, p. 407);

PAR LE P. H. ROCHETTE,

Si une équation du troisième degré et sa dérivée ont toutes leurs racines rationnelles, les racines a , b , c de la première seront données par les formules

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

m , h et u étant des nombres rationnels. (PROUDET.)

Soient donc a , b , c les trois racines de l'équation donnée

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les racines de la dérivée soient rationnelles est exprimée par la relation

$$P^2 - 3Q = C^2.$$

Si nous y remplaçons P et Q par leurs valeurs en fonction des racines, elle prendra la forme suivante :

$$(a - b)^2 + (a - c)(b - c) = C^2,$$

et cette relation entre les trois racines a , b , c suffit pour qu'on puisse les mettre sous la forme indiquée.

En effet, si nous éliminons m et h entre les trois équations

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

nous obtiendrons une équation du second degré en u

$$(a - c)u^2 - 2(a - b)u - (b - c) = 0,$$

qui donnera pour u des valeurs rationnelles toutes les fois que

$$(a - b)^2 + (a - c)(b - c)$$

sera un carré parfait. On pourra donc, dans ce cas-là, trouver aussi pour m et h des valeurs rationnelles, et exprimer les trois nombres rationnels a , b , c au moyen des fonctions indiquées de m , h et u .

Le problème a deux solutions dans le cas où $P^2 - 3Q$ n'est pas nul, et une seule dans le cas contraire.

On démontrerait très-facilement que réciproquement lorsque les trois racines a , b , c d'une équation du troisième degré sont données par les formules

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

les racines de la dérivée sont rationnelles.