

E. DE JONQUIÈRES

**Applications diverses des théories de
la géométrie supérieure. Construction
des sections coniques déterminées
par cinq conditions**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 116-125

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__116_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**APPLICATIONS DIVERSES DES THÉORIES DE LA GÉOMÉTRIE
SUPÉRIEURE.**

Construction des sections coniques déterminées par cinq conditions ;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. On donne cinq points a, b, c, d, e .

I^e Solution. Les rayons ac, ad, ae et leurs homologues bc, bd, be appartiennent à deux faisceaux homographiques. Donc si l'on mène arbitrairement un rayon af , on connaîtra le rayon correspondant bf , et, par suite, le point f , intersection des deux rayons; on a donc un sixième point de la conique, etc.

Si l'on prend le rayon ab au lieu de af , son homologue bt dans le second faisceau sera la tangente en b , etc.

II^e Solution. $abcd$ forme un quadrilatère inscrit dans la conique cherchée. Par le point e , on mènera une droite quelconque ef et l'on cherchera le point f , conjugué du point e dans l'involution déterminée sur cette droite par les points où elle rencontre les côtés opposés du quadrilatère. Ce point f appartiendra à la conique.

Si l'on veut trouver la tangente bt en b , on regardera

$acbt$ comme un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont infiniment voisins en b et la droite ed comme une transversale de ce quadrilatère. Cette transversale coupe les côtés opposés ba , bc en α , γ , la courbe en e et d et les côtés opposés ac , bt en δ et x . Ces six points formant une involution, on déterminera le point x , et, par suite, la tangente bt .

III^e Solution. Par le point e , on mène une droite quelconque ef et l'on forme ainsi un hexagone inscrit $abcdef$ dont le sixième sommet f est inconnu. Soit α le point de rencontre de ab et de de , β celui de bc et de ef ; le côté cd coupe $\alpha\beta$ au point où aboutit sur cette droite le côté inconnu af , ce qui fixe le point f (théorème de Pascal).

Si l'on veut trouver la tangente en b , on regarde cette tangente comme le sixième côté d'un hexagone dont deux sommets se confondent en b . La tangente bt coupe le côté ed en un point γ qui est en ligne droite avec les points de concours α , β des côtés ba et cd avec les côtés opposés ae et bc ; elle est ainsi déterminée.

On peut encore résoudre le problème en se servant du théorème de Carnot, etc.

2. *On donne cinq tangentes A, B, C, D, E.*

I^{re} Solution. Les tangentes C, D, E déterminent sur A et B deux divisions homographiques. On obtient donc une sixième tangente quelconque passant par un point pris sur A, en joignant ce point au point homologue de la division marquée sur B.

Si l'on prend pour ce point le point de concours (A, B) des deux tangentes A, B, on obtient immédiatement le point de contact de la courbe avec A ou B, suivant qu'on regarde ce point comme appartenant à B ou à A. On peut ainsi ramener la question à celle des cinq points.

II^e Solution. Quatre des tangentes données forment

un quadrilatère circonscrit. Qu'on prenne sur la cinquième un point quelconque a et qu'on le joigne aux quatre sommets du quadrilatère ; le sixième rayon, conjugué à la cinquième tangente dans l'involution que ces quatre droites déterminent, est une tangente issue du point a .

Supposons qu'on veuille trouver le point de contact t de la tangente B. On considère le quadrilatère formé par les tangentes A, C, B dont deux côtés se confondent en un seul suivant B, et dont (A, C), (A, B), (B, C) et t sont les quatre sommets. Le sommet t est inconnu, mais les six rayons qui aboutissent au point de concours I de D et E, savoir D, E, I(A, B), I(B, C), I(A, C), I_t sont en involution, et cinq sont connus. Il sera donc facile de déterminer le sixième, et, par suite, le point cherché t .

III^e Solution. On détermine aussi une sixième tangente quelconque au moyen du théorème de M. Brianchon.

Si l'on veut, au moyen du même théorème, trouver le point de contact t de la tangente B et que $abcde$ soit le pentagone formé par les cinq tangentes données, on joindra ad et be qui se coupent en O ; la droite cO ira couper ae , c'est-à-dire B, au point cherché t .

Nota. Dans le cas de la parabole, la cinquième tangente est donnée implicitement ; c'est la droite à l'infini. Les quatre qui sont données forment un quadrilatère. Par les sommets de ce quadrilatère, on mènera quatre parallèles dans une direction arbitraire ; on les coupera par une transversale quelconque sur laquelle on cherchera le point central de l'involution qu'elles y déterminent, et la parallèle aux autres droites, menée par ce point, sera sur une cinquième tangente.

Cette construction dérive, sans difficulté, de la deuxième solution.

3. *On donne quatre points et une tangente.*

Il suffit de trouver un cinquième point, et la question sera ramenée à la première.

I^{re} Solution. Soient $abcd$ le quadrilatère donné et e le point de contact inconnu de la tangente. Soient α, α' et β, β' les points où cette tangente rencontre respectivement les côtés opposés du quadrilatère. Ces points déterminent une involution dont e est un point double. Il sera donc facile à trouver. Mais on voit que la question a deux solutions.

Nota. Dans le cas de la parabole, la tangente est à l'infini. Soit S le point de concours des côtés opposés ad, bc du quadrilatère donné. Qu'on mène Sc' et Sd' parallèles respectivement aux deux autres côtés opposés. On a quatre rayons Sc', Sd', Sc, Sd issus du point S , qui, conjugués deux à deux, déterminent une involution. Chacun des deux rayons doubles de cette involution est parallèle à l'axe d'une parabole qui satisfait à la question.

Soit cX une parallèle à l'un de ces deux rayons doubles menée par le point c pour lequel on veut, par exemple, trouver la tangente ct à la parabole dont cX est un diamètre. Les deux faisceaux Xa, Xb, Xc, Xd (celui-ci formé de rayons parallèles) et ca, cb, cd, ct sont homographiques. Si l'on prend les points de concours inverses a', b' des rayons homologues, la droite $a'b'$ sera parallèle à la tangente en c , parce que les deux points a' et b' sont en ligne droite avec le point où la tangente ct rencontre la tangente en X , c'est-à-dire la droite située à l'infini.

II^e Solution. Soit et la tangente donnée dont le point de contact e est inconnu. On peut regarder la figure comme un hexagone dont les côtés opposés sont $ab, ed; be, dc;$

et, ac. Le point t , où la tangente donnée rencontre le côté ac , est connu. Soient α et β les points de concours de ab avec de et de cd avec be respectivement. Les points α , β , t sont en ligne droite, par la propriété de l'hexagone inscrit. Il s'agit donc de mener, par les deux points fixes b et d , deux rayons $b\beta$, $d\alpha$ qui se coupent en e sur la tangente donnée et tels, que les points α , β et t soient en ligne droite. Ces rayons sont évidemment deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques qui marquent sur les côtés ab , cd , respectivement deux séries de points pareillement homographiques. Si l'on joint le point t à ces points, on formera autour du sommet t deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles fourniront l'un et l'autre une solution de la question proposée.

Nota. Dans le cas de la parabole, la tangente et est à l'infini, la construction reste d'ailleurs la même, et chaque rayon double est un diamètre d'une parabole qui satisfait à la question.

4. On donne quatre tangentes et un point.

I^{re} Solution. On détermine une cinquième tangente en cherchant les rayons doubles de l'involution qui est déterminée par les quatre rayons, conjugués deux à deux, qu'on obtient en joignant le point donné aux sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes données. Chacun des deux rayons doubles est une tangente à la conique; on a donc deux solutions distinctes.

Nota. Pour la parabole, on donne un point et trois tangentes, la quatrième est à l'infini. La solution est la même. Deux des rayons de l'involution sont parallèles respectivement à deux des tangentes données.

II^e Solution. La figure représente un hexagone circonscrit $abcdef$. Les côtés ab , bc , ef , af sont donnés de direction, ainsi que le point d . Il s'agit de mener par le

point d une droite cde qui rencontre les côtés indéfinis bc et fe en c et e respectivement et telle, que les droites be et cf se croisent en un point de la droite ad .

Or il est évident que si l'on fait pivoter la droite ce autour du point d , les points variables c et e marqueront sur bc et fe respectivement deux divisions homographiques. Les faisceaux formés par les rayons variables be, fc sont pareillement homographiques, et il en sera de même des deux divisions de points que ces rayons marquent sur la droite ad . Si l'on détermine les *points doubles* de ces deux divisions, chacun d'eux étant joint aux points b et f , fournira une solution de la question.

Nota. Dans le cas de la parabole où la tangente fe , par exemple, est tout entière à l'infini, voici à quoi se réduit la construction générale. On mène par le point donné d une droite quelconque qui coupe le côté indéfini bc au point γ . Par ce point, on mène parallèlement à af une droite qui coupe ad en α' , et par le point b , parallèlement à $d\gamma$, une droite qui coupe ad en α . Les points α, α' appartiennent respectivement à deux divisions homographiques dont on cherche les points doubles ε, φ . La droite dc , parallèle à $b\varepsilon$, est tangente à l'une des deux paraboles qui satisfont aux conditions proposées. La droite dc' , parallèle à $b\varphi$, est tangente à la seconde.

5. *On donne trois points et deux tangentes.*

Soient a, b, c les trois points donnés, T, T' les deux tangentes qui se coupent au point O et qui touchent respectivement la courbe aux deux points d, e qu'il s'agit de déterminer.

On peut regarder la corde de contact de comme représentant un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont infiniment voisins l'un de l'autre en d , tandis que les deux autres le sont pareillement en e . La corde bc étant considérée comme une transversale du quadrilatère et de la

courbe, fournit une relation d'involution, en vertu du théorème de Desargues, entre les six points où elle coupe les côtés opposés du quadrilatère et la courbe. Ces points se réduisent ici à cinq, savoir : t, t' sur les tangentes dO, eO respectivement; ε sur les deux autres côtés opposés qui se confondent en un seul de ; et enfin b, c sur la courbe. Le point ε est donc un point double de l'involution déterminée par les segments bc, tt' .

Si l'on prend ab comme transversale au lieu de bc , on trouvera de même un point φ appartenant à la corde de contact de , qui se trouve ainsi déterminée par les deux points ε et φ . Mais comme chacune des deux relations d'involution fournit deux points doubles $\varepsilon, \varepsilon'$ et φ, φ' , on obtiendra quatre positions distinctes de la corde de , savoir $\varepsilon\varphi, \varepsilon\varphi', \varepsilon'\varphi, \varepsilon'\varphi'$, c'est-à-dire quatre solutions différentes du problème proposé.

Nota. Dans le cas de la parabole où l'on ne donne qu'une tangente et trois points, on obtient de même quatre solutions. La tangente T' est à l'infini ainsi que le point t' ; donc le point t qui lui est conjugué dans l'involution est le *point central* de cette involution dont on connaît en outre le segment bc et dont il s'agit de trouver les points doubles. Chacune des quatre cordes de contact $\varepsilon\varphi$ est un diamètre d'une parabole satisfaisant aux conditions proposées.

6. On donne trois tangentes et deux points.

Nous allons déterminer deux nouvelles tangentes à la courbe aux points donnés a, b . Soient AB, BC, CD celles qui sont données. Désignons par O le point de concours inconnu des deux tangentes cherchées; si l'on regarde l'angle bOa comme un quadrilatère circonscrit $OaOb$ dont les côtés adjacents se sont confondus deux à deux en un seul Oa ou Ob , on verra tout de suite que la droite BO est un rayon double dans l'involution formée

par les deux couples de rayons conjugués Ba , Bb et BA , BC .

Pareillement, CO est un rayon double de l'involution Ca , Cb , CB , CD . Donc le point O , intersection des rayons BO et CO est déterminé. Mais comme chacune des deux involutions comporte deux tels rayons, on obtient quatre positions distinctes du point O , et, par conséquent, le problème admet, comme le précédent, quatre solutions.

Nota. S'il s'agit d'une parabole, l'une des trois tangentes données est à l'infini, BC par exemple. La construction reste la même en principe; mais ici les deux faisceaux de rayon en involution se composent de droites parallèles, puisque leurs sommets respectifs B et C sont à l'infini. Coupons-les par une transversale quelconque. On aura sur cette droite, relativement au premier faisceau, deux points α , β intersections des rayons conjugués aB , bB ; un point ω , intersection du rayon AB dont le conjugué CB est à l'infini, ce qui est cause que ω est le *point central* de l'involution; enfin un point double x , intersection du rayon BX et qu'il s'agit de déterminer. Relativement au second faisceau, on aura de même deux points conjugués d'une involution α' , β' ; un point central ω' , et l'on déterminera un point double y ; les droites xO , yO , parallèles respectivement aux tangentes données AB , DC , se couperont au sommet O de l'angle circonscrit à l'arc ab de la parabole, et l'on aura encore quatre solutions, parce que l'on obtiendra deux positions du point x et deux positions du point y .

7. Quelques-unes des données peuvent être imaginaires. Sans entrer dans le détail des différents cas qui peuvent se présenter, supposons qu'on ait à faire passer une conique par quatre points imaginaires et un point réel a .

Le système des quatre points imaginaires peut être

donné au moyen de deux coniques (tracées ou seulement déterminées par cinq conditions) qui ne se coupent en aucuns points réels.

Dans ce cas, menons par le point donné a une transversale qui rencontre les deux coniques données en h, h', i, i' respectivement et la conique qu'on veut construire en a' . Les six points a, a', h, h', i, i' sont en involution; donc on déterminera facilement le point a' , et, par suite, autant de points qu'on voudra de la conique cherchée.

L'une des coniques données peut être remplacée par le système de deux droites qui seront, par conséquent, les *axes de symptose* de la première et de celle qu'on a à construire. La construction demeure identiquement la même.

Enfin, on peut ne donner que deux droites L, L' sur lesquelles doivent se trouver deux par deux les points imaginaires $\varepsilon, \varphi, \gamma, \theta$. Mais alors il faut connaître en outre leurs points milieux ω, ψ et les rectangles de leurs distances à deux points fixes pris sur L et sur L' , ou, ce qui en est une conséquence, au point de rencontre m de ces deux droites. Ainsi l'on connaît $m\varepsilon.m\varphi$ et $m\gamma.m\theta$.

Par le point a , menons, parallèlement à L , une droite $aa'n$ qui coupe la conique cherchée en a' et L'' en n . On aura, en vertu du théorème de Newton (*Géométrie supérieure*, n° 480),

$$\frac{na'.na}{n\gamma.n\theta} = \frac{m\varepsilon.m\varphi}{m\gamma.m\theta},$$

équation qui fera connaître le point a' . Par ce point, on mènera une parallèle à L' et l'on déterminera un autre point b , et ainsi de suite de proche en proche.

Remarque. Deux des points imaginaires peuvent être donnés à l'infini, soit sur une conique, soit sur un cercle. Dans le premier cas, la conique cherchée est *homothétique* à celle qui est donnée, et dans le second elle est un

(125)

cercle ayant pour axe radical avec le cercle donné la droite sur laquelle sont donnés les deux autres points imaginaires.

Etc.