NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. BOURDELLES

Rectification et solution de la question 289

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 102-105

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__102_1>

RECTIFICATION ET SOLUTION DE LA QUESTION 289

(voir t. XIII, p. 192, et t. XIV, p. 32);

PAR M. L. BOURDELLES,
Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Si dans un triangle rectiligne ABC on a

$$A < B :$$

1° si l'on mène aux côtés opposés les transversales AD et BE telles que

$$CAD \gtreqless CBE,$$

alors

$$AD > BE \text{ (*)};$$

2° si

$$AD = BE \quad \text{et} \quad \frac{DAB}{DAC} = \frac{EBA}{EBC},$$

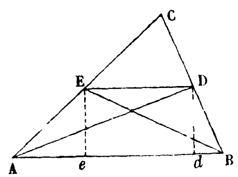
alors

$$A = B.$$

1°. Si les triangles CAD, CBE sont égaux en surface,

(*) Cette conclusion n'est pas vraie dans tous les cas, comme on le verra plus loin.

les triangles DAB, EBA le seront aussi, et comme ils ont



même base AB, leurs hauteurs Dd, Ee seront égales, donc la ligne ED, qui joint les sommets E, B, sera parallèle à AB. Mais les triangles rectangles AeE, BdD montrent que

$$Ae > Bd, \quad \text{car} \quad A < B, \quad AE > BD,$$

puisque

$$AC > CB \quad \text{et} \quad Ee = Dd;$$

on aura donc

$$Ae + ed > Bd + ed$$

ou

$$Ad > Be,$$

et, par conséquent,

$$AD > BE,$$

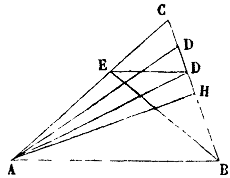
à cause des triangles rectangles AdD, BeE.

On a supposé que les transversales rencontraient les côtés du triangle. Le théorème existe encore si elles rencontrent ces côtés prolongés dans le sens AC et BC. On a au contraire AD $<$ BE, si elles rencontrent les côtés prolongés en sens contraire.

2°. On a

$$CAD < CBE.$$

Abaissons du point A sur BC la perpendiculaire AH. Supposons CBE $\leq$ CAH; si par le point E on mène la parallèle ED′ au côté AB, en joignant au point A le point D′ où elle rencontre BC, on aura, en vertu de ce



qui précède

$$EB < AD' \leqq AD.$$

C. Q. F. D.

Mais si CBE > CAH, le théorème n'existe plus (*).

De la relation

$$\frac{DAB}{DAC} = \frac{EBA}{EBC},$$

on déduit

$$\frac{DAB}{ABC} = \frac{EBA}{ABC}.$$

Donc

$$AB . EB . \sin EBA = AB . AD . \sin DAB,$$

c'est-à-dire que dans tous les cas les angles EBA, DAB sont égaux; par conséquent les triangles EBA, DAB sont aussi égaux. Donc

$$A = B.$$

On peut démontrer le théorème proposé en supposant que CAD et CBE désignent des angles. En effet, si

$$CAD = CBE,$$

les triangles CAD, CBE sont semblables et on a

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{EB}.$$

(*) On voit à priori que le théorème n'est pas toujours vrai, car si l'on suppose CBE différant très-peu de la surface du triangle, et CAD différant

Mais

$$AC > BC,$$

donc

$$AD > EB.$$

C. Q. F. D.

Ce théorème est vrai aussi quand les transversales rencontrent les prolongements des côtés.

Mais si $CAD < CBE$, le théorème ne subsiste que lorsque $EBC < 90 - E - \ldots$.

Nota. Ces diverses propositions se démontrent facilement par la trigonométrie, qui a l'avantage de montrer clairement les restrictions à apporter dans l'énoncé.