NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PROUHET

Note sur l'aire d'un polygone plan et sur l'expression de cette aire en fonction des coordonnées des sommets

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 373-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__373_1>

NOTE

Sur l'aire d'un polygone plan et sur l'expression de cette aire en fonction des coordonnées des sommets ;

PAR M. E. PROUHET.

On définit ordinairement l'aire d'une figure plane en disant que c'est *la portion de plan limitée par son contour*. Mais cette définition n'offre plus de sens raisonnable lorsque ce contour, fermé d'ailleurs, présente des points doubles, comme cela a lieu dans les polygones étoilés. Il est cependant possible d'étendre la notion de superficie de manière à la rendre applicable à tous les cas.

2. Soient A_1, A_2,..., A_n les n sommets consécutifs d'un polygone, soit PM un rayon vecteur dont l'extrémité P, que nous nommerons le *pôle,* demeure fixe pendant que l'autre extrémité M se meut sur le périmètre dans un sens déterminé, A_1, A_2,..., A_n par exemple. Le rayon vecteur étant d'abord en PA_1 et venant ensuite en PA_2, nous dirons qu'il a engendré ou décrit le triangle PA_1A_2, de sorte que le point M, revenu à sa position initiale après avoir parcouru tout le contour, aura décrit n triangles.

Or les sinuosités du contour pouvant faire que PM tourne tantôt dans un sens que nous nommerons *direct,* tantôt dans le sens opposé, il sera naturel de considérer comme *positives* les aires décrites dans le premier sens, et comme *négatives* celles qui sont décrites dans le mouvement rétrograde. Cette convention est déjà faite en mécanique et son introduction en géométrie offre de grands avantages, comme le montrera la suite de cet article.

3. D'après cela, si le polygone est convexe et le pôle P pris dans son intérieur, tous les triangles seront décrits dans le même sens et leur somme algébrique se réduira, suivant les cas, à $\pm$ l'aire du polygone, le mot *aire* étant pris encore dans son acception ordinaire.

Si le pôle est extérieur, tous les triangles ayant quelque portion de leur surface dans l'intérieur du polygone auront le même signe, tous ceux qui sont entièrement situés hors du polygone auront le signe opposé, et il est visible que la somme algébrique des triangles de première et de seconde espèce sera encore égale à $\pm$ la surface du polygone.

4. Ces résultats conduisent naturellement à la défi-

nition qu'il convient d'adopter et qui est la suivante:

L'aire d'un polygone plan est la somme algébrique des triangles engendrés par un rayon vecteur dont l'extrémité fixe est placée en un point quelconque du plan et dont l'autre parcourt le périmètre du polygone dans un sens déterminé.

Toutefois, pour justifier complétement cet énoncé, il faut démontrer que l'expression ainsi définie demeure la même en grandeur et en signe pour un même sens de rotation, quel que soit le pôle. C'est ce que l'analyse suivante mettra hors de doute.

5. Considérons, en premier lieu, un triangle PA_1A_2 dont l'un des sommets, pris pour pôle, soit à l'origine de coordonnées rectangulaires. Désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point A_1 et par x_2, y_2 celles du point A_2.

En supposant d'abord que le triangle soit tout entier dans l'angle YOX, et que l'on ait $x_1y_2 > y_1x_2$, on trouvera sans peine pour l'aire absolue

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

par conséquent, si l'on désigne $x_1y_2 - x_2y_1$ par $[1, 2]$ et si en énonçant un triangle, on marque par l'ordre des lettres le sens dans lequel le côté A_1A_2 est parcouru, on aura

$$PA_1A_2 = \frac{1}{2}[1, 2],$$

d'où résulte

$$PA_2A_1 = -PA_1A_2 = -\frac{1}{2}[1, 2],$$

et, par conséquent,

$$PA_2A_1 = \frac{1}{2}[2, 1],$$

puisque

$$[2, 1] = -[1, 2].$$

On voit par là qu'en écrivant dans les crochets les indices dans le même ordre que dans le premier membre, le second membre prend de lui-même le signe convenable.

6. Maintenant, si l'on suppose que les axes primitifs tournent d'un angle α, le second membre conservera la même valeur, comme on s'en assurera sans peine en mettant à la place des nouvelles coordonnées leurs valeurs en fonction des anciennes, d'où résulte que la formule démontrée pour une position particulière des axes est vraie pour une position quelconque.

7. Considérons actuellement un polygone A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$. Des rayons vecteurs étant menés à tous les sommets, on aura

$$PA_1A_2 = \frac{1}{2}[1, 2],$$

$$PA_2A_3 = \frac{1}{2}[2, 3],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$PA_{n-1}A_n = \frac{1}{2}[n-1, n],$$

$$PA_nA_1 = \frac{1}{2}[n, 1],$$

d'où

$$PA_1A_2 + PA_2A_3 + PA_3A_4 + \ldots + PA_nA_1$$
$$= \frac{1}{2}[1, 2] + \frac{1}{2}[2, 3] + \ldots + \frac{1}{2}[n, 1].$$

Le premier membre (en ayant égard aux rotations indiquées par l'ordre des lettres) est ce que nous nommons l'aire du polygone relative au sens $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On a donc en désignant l'aire par S,

$$S = \frac{1}{2}\sum[1, 2].$$

Telle est donc l'expression de l'aire dans le cas le plus général possible. Le second membre, que nous savons déjà être indépendant de la direction des axes, est, en outre, indépendant de leur origine, comme on s'en assure en transportant cette origine en un point quelconque. Les dénominations adoptées plus haut se trouvent donc complétement justifiées.

8. La formule que nous venons de démontrer exige seulement que le polygone soit fermé. Les côtés peuvent d'ailleurs se couper d'une manière quelconque, plusieurs sommets peuvent se réunir en un seul sans que la formule cesse d'être applicable, pourvu que le périmètre puisse être considéré comme un fil non interrompu qui, partant du point A_1 et passant successivement par les points A_2, A_3, etc., finit par revenir au point de départ.

D'après cela, un polygone de n sommets pourra être considéré comme ayant $2n$, $3n$,..., kn côtés. Il suffira de concevoir que le fil revenu en A_1 recommence à passer, et dans le même ordre, par les points A_2, A_3, etc., et cela un nombre quelconque de fois, pourvu qu'il finisse par s'arrêter au point de départ.

9. L'emploi des signes $+$ et $-$ pour distinguer les aires engendrées par des rotations directes ou inverses doit avoir l'utilité de ces sortes de conventions qui est de réunir dans un même énoncé un nombre souvent considérable de théorèmes du même genre. En voici quelques exemples sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

A, B, C, etc., désignant des points distribués comme on voudra dans un plan et ABC l'aire du triangle dont les sommets sont A, B, C, on aura :

Pour cinq points :

$$\mathrm{ACE}.\mathrm{ABD} = \mathrm{ABE}.\mathrm{ACD} + \mathrm{ABC}.\mathrm{ADE}.$$

(Théorème de Fontaine.)

$$(ABCDE)^2 - (ABC + BCD + CDE + DEA + EAB).ABCDE$$
$$+ ABC.BCD + BCD.CDE + CDE.DEA$$
$$+ DEA.EAB + EAB.ABC = 0.$$

(Théorème de Gauss.)

Pour sept points :

$$ABE.ACF.ADG = ABE.ACD.AFG + ABC.ADE.AFG$$
$$+ ACF.ADE.ABG + ACD.AEF.ABG$$
$$+ ADG.ABC.AEF.$$

(Théorème nouveau.)

Il suffira de démontrer ces égalités dans le cas fort étendu où le polygone ayant pour sommets les points considérés est convexe. Démontrées pour ce cas, elles devront se réduire à de véritables identités quand on y substituera les valeurs des aires en fonction des coordonnées, et dès lors elles auront lieu quelle que soit la disposition des points considérés.