NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE ROUCHÉ

Théorème de Legendre et de M. P. Serret sur le triangle sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 354-356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__354_0>

THEORÈME DE LEGENDRE ET DE M. P. SERRET SUR LE TRIANGLE SPHÉRIQUE,

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Ancien eleve de l'Ecole Polytechnique.

En rendant compte de l'excellent ouvrage de M. Paul Serret, M. Prouhet appelle l'attention sur le théorème suivant :

Si les côtés a , b, c *d'un triangle sphérique sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, on peut substituer à sa résolution celle d'un triangle rectiligne auxiliaire ayant pour l'un de ses côtés* a *et pour angles* A, B — E, C — E (2E *étant l'excès sphérique*); *et les deux autres côtés de ce triangle ne différeront des côtés correspondants du triangle sphérique que par des infiniment petits du second ordre.*

Cette proposition peut-elle, comme l'affirme l'auteur des *Méthodes en Géométrie,* « être employée aux *mêmes* usages que le théorème *analogue* de Legendre? »

Le théorème de M. Serret et celui de Legendre fournissent l'un et l'autre un triangle rectiligne qu'on peut, dans certains cas, substituer au triangle sphérique; voilà l'analogie. Mais Legendre ne néglige que les quantités du quatrième ordre, tandis que M. Serret néglige celles du second; voilà la différence : elle est assez essentielle pour que les deux théorèmes ne puissent pas se prêter aux mêmes usages.

Bien plus, lorsqu'on se borne au second ordre, le triangle de M. Serret est trop particulier.

Considérons, en effet, un triangle sphérique ABC dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

Supposons d'abord que ce triangle soit rectangle en A, et construisons avec les éléments a, B, C un triangle rectiligne $A'B'C'$. Les différences

$$A - A', \quad b - b', \quad c - c'$$

sont du second ordre, car on a

1°. $$A - A' = \frac{\pi}{2} - (\pi - B - C) = 2E;$$

2°. $$\sin\frac{b}{R} = \sin\frac{a}{R}\sin B,$$

ou

$$\frac{b}{R}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2}\right) = \frac{a}{R}\left(1 - \frac{a^2}{6R^2}\right)\sin B,$$

$$b = \frac{1 - \frac{a^2}{6R^2}}{1 - \frac{b^2}{6R^2}} a \sin B = b'\left(1 + \frac{b^2 - a^2}{6R^2}\right),$$

$b = b'$ au second ordre près;

3°. Même calcul pour $c - c'$.

Les éléments du triangle rectiligne $A'B'C'$ ne diffèrent donc qu'au second ordre des éléments correspondants du triangle sphérique rectangle ABC. Or, si dans le triangle rectiligne $A'B'C'$ on laisse deux éléments fixes et qu'on fasse varier un troisième élément de quantités du second ordre, les autres éléments ne varieront que de quantités de cet ordre; on pourra donc se procurer une infinité de triangles rectilignes dont les éléments ne diffèrent qu'au second ordre de ceux du triangle sphérique rectangle ABC.

Prenons maintenant un triangle sphérique obliquangle ABC; menons la hauteur AD et formons deux triangles rectangles adjacents $A'B'D'$, $A'C'D'$ composés des éléments

$$A'D' = AD, \quad A'B' = AB, \quad A'C' = AC,$$
$$B'A'D' = BAD, \quad C'A'D' = CAD.$$

L'angle $B'D'C'$ ne diffère de π qu'au second ordre, puisque, d'après le théorème précédent, chacun des angles en D' est égal à $\frac{\pi}{2}$, aux quantités du second ordre près. Donc $B'C'$ ne diffère de $B'D' + D'C'$ qu'au second ordre; et comme, d'après le théorème précédent, les côtés $B'D'$ et $D'C'$ sont égaux à BD et à DC, aux quantités du second ordre près, $B'C'$ ne diffère qu'au second ordre de BC.

D'ailleurs, les angles $C'B'D'$, $B'C'D'$ étant du second ordre, les angles $A'B'D'$, $A'C'D'$ sont égaux à B et à C, à des quantités du second ordre près.

Ainsi le triangle rectiligne $A'B'C'$ possède, aux quantités du second ordre près, les mêmes éléments que le triangle sphérique ABC. Il suffira donc de laisser fixes deux éléments de ce triangle rectiligne et de faire varier un troisième élément de quantités du second ordre, pour *obtenir une infinité de triangles rectilignes dont les éléments ne diffèrent qu'au second ordre des éléments correspondants du triangle sphérique* ABC.