NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Sur l'évaluation d'une fonction algébrique fractionnaire, la variable étant racine d'une équation algébrique donnée ; d'après Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 315-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__315_0>

SUR L'ÉVALUATION D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE FRACTIONNAIRE

La variable étant racine d'une équation algébrique donnée ;

D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. III, 1814-15, pages 39.

I.

Soient Z, ζ, ζ' trois fonctions entières de z; on demande quelle fonction entière on peut substituer à la fraction $\frac{Z}{\zeta}$, telle qu'en y substituant pour z une racine de l'équation $\zeta' = 0$, on trouve la même valeur qu'en substituant cette racine pour z dans l'expression fractionnaire $\frac{Z}{\zeta}$.

Soient k le degré de ζ et k' le degré de ζ'; on suppose d'ailleurs que ζ et ζ' n'ont pas de facteur commun, de sorte que la fraction $\frac{Z}{\zeta}$ ne peut devenir infinie: ce qui aurait lieu si l'on substituait une racine commune à ζ et à ζ'.

Faisons sur ζ et ζ' les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur; on aura cette suite d'équations :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \zeta'' = \lambda\zeta - p\zeta', \\ \zeta''' = \lambda'\zeta' - p'\zeta'', \\ \zeta^{\text{IV}} = \lambda''\zeta'' - p''\zeta''', \\ \zeta^{\text{V}} = \lambda'''\zeta''' - p'''\zeta^{\text{IV}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta^{(m)} = \lambda^{(m-2)}\zeta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\zeta^{(m-1)}. \end{array}\right.$$

Les ζ à partir de ζ'' sont les résidus des divisions, fonctions entières dont le coefficient du premier terme est l'unité; et soient k'', k''', k^{IV},..., $k^{(m)}$ les degrés successifs de ces résidus. Ces nombres k, k', k'',..., $k^{(m)}$ vont toujours en décroissant et enfin $k^{(m)}=0$; p, p', p'',..., $p^{(m-1)}$ sont des fonctions entières de z de l'ordre $k-k'$, $k'-k''$, $k''-k'''$; les λ sont des nombres, et $\zeta^{(m)}=1$; car le dernier reste doit être l'unité puisque les fractions n'ont pas de diviseur commun: si $k'>k$, il faudra faire $p=0$.

Formons une seconde série de fonctions entières de z, en changeant dans les équations (1) les ζ en η et supposant $\eta=1$, $\eta'=0$; on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \eta'' &= \lambda\eta - p\eta', \\ \eta''' &= \lambda'\eta' - p'\eta'', \\ \eta^{\text{IV}} &= \lambda''\eta'' - p''\eta''', \\ \eta^{\text{V}} &= \lambda'''\eta''' - p^{\text{IV}}\eta^{\text{V}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta^{(m)} &= \lambda^{(m-2)}\eta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\eta^{(m-1)}. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que $\eta''=\lambda$, par conséquent η'' est d'ordre nul; que $\eta'''=-p'\lambda$, donc η''' est de même ordre que p', c'est-à-dire de l'ordre $k'-k''$; η^{IV} est de même ordre que $p''\eta'''$, c'est-à-dire de l'ordre

$$k''-k'''+k'-k''=k'-k'''.$$

On trouve de même que η^{V} est de l'ordre $k'-k^{\text{IV}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\eta^{(m)}$ qui est de l'ordre $k'-k^{(m-1)}$.

Considérons cette troisième série de fonctions

$$\zeta-\zeta\eta,\quad \zeta'-\zeta\eta',\quad \zeta''-\zeta\eta'',\quad \zeta'''-\zeta\eta''',\ldots.$$

on a évidemment les relations

$$\begin{aligned} \zeta''-\zeta\eta'' &= \lambda(\zeta-\zeta\eta)-p(\zeta'-\zeta\eta'), \\ \zeta'''-\zeta\eta''' &= \lambda'(\zeta-\zeta\eta')-p'(\zeta''-\zeta\eta''), \\ \zeta^{\text{IV}}-\zeta\eta^{\text{IV}} &= \lambda''(\zeta''-\zeta\eta'')-p''(\zeta'''-\zeta\eta'''). \end{aligned}$$

Il est évident que

$$\zeta - \zeta\eta = 0, \quad \zeta' - \zeta\eta' = \zeta',$$

donc $\zeta'' - \zeta\eta''$ est divisible par ζ'; de même $\zeta''' - \zeta\eta'''$, $\zeta^{\text{iv}} - \zeta\eta^{\text{iv}}, \ldots$ Chacune de ces fonctions étant divisible par ζ', il s'ensuit que la racine de ζ' substituée dans ces fonctions les annule; donc la dernière fonction

$$\zeta^{(m)} - \zeta\eta^{(m)} = 1 - \zeta\eta^{(m)}$$

devient nulle en remplaçant z par une racine de $\zeta' = 0$; donc il en est de même de

$$\frac{Z}{\zeta}[1 - \zeta\eta^{(m)}] = \frac{Z}{\zeta} - Z\eta^{m}.$$

Ainsi la substitution de la valeur de z dans $\frac{z}{\zeta}$ donne le même résultat que si on la substitue dans la fonction entière $z\,\eta^{(\mu)}$; c'est ce qu'il fallait trouver.

II.

Nous avons vu que $Z\eta^{(m)}$ peut remplacer $\frac{Z}{\zeta}$; mais il suffit de prendre le résidu de la division de $Z\eta^{(\mu)}$ par ζ': à cet effet, posons les équations

$$\begin{aligned}
Z &= q'\ \zeta' + Z',\\
Z' &= q''\ \zeta'' + Z'',\\
Z'' &= q'''\ \zeta''' + Z''',\\
Z''' &= q^{\text{iv}}\zeta^{\text{iv}} + Z^{\text{iv}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z^{(m-1)} &= q^{(m)}\,\zeta^{(m)} + Z^{(m)},
\end{aligned}$$

où

Z' est le résidu de la division de		Z par ζ',
Z''	»	Z' par ζ'',
Z'''	»	Z'' par ζ''',
etc.		

Or Z' est d'un ordre inférieur à l'ordre de ζ' inférieur à k', Z'' est d'un ordre inférieur à celui de ζ'' inférieur à k''; et allant de suite, $Z^{(m)}$ est d'un ordre inférieur à $\zeta^{(m)}$, c'est-à-dire à 1. Donc

$$Z^{(m)} = 0;$$

ainsi

$$Z = q'\zeta' + q''\zeta'' + q'''\zeta''' + q^{\text{IV}}\zeta^{\text{IV}} + \ldots + q^{(\mu)}\eta^{(\mu)}.$$

En posant

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\zeta'' = \zeta\eta'', \quad \zeta''' = \zeta\eta''', \ldots, \quad \zeta^{\text{IV}} = \zeta\eta^{\text{IV}}$$

(voir ci-dessus); donc, avec la même condition,

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\frac{Z}{\zeta} = q''\eta'' + q'''\eta''' + q^{\text{IV}}\eta^{\text{IV}} + \ldots + q^{(m)}\eta^{(m)}.$$

Or z' est d'un ordre inférieur à k' : $q''\zeta''$ est donc aussi d'un ordre inférieur à k'; mais ζ'' est d'ordre k'' : q'' est donc d'un ordre inférieur à $k'-k''$; mais η'' est d'ordre nul : donc $q''\eta''$ est d'ordre inférieur à k', z'' est d'ordre inférieur à k'', et de même $q'''\zeta'''$; mais ζ''' est d'ordre k''' : donc q''' est d'ordre inférieur à $k''-k'''$; η''' est d'ordre $k'-k''$: donc $q'''\eta'''$ est d'ordre inférieur à $k'-k'''$, et on démontre de même que tous les termes sont d'un ordre inférieur à k'.

Si l'équation

$$\zeta' = 0$$

a des racines rationnelles, il est plus facile de substituer immédiatement ces valeurs dans $\frac{Z}{\zeta}$ et de débarrasser ζ'

de ces racines ; le degré de la fonction équivalente sera *moindre* alors que si on laisse subsister ces racines rationnelles.

III. *Applications.*

$$Z = z^6 - \frac{50}{39} z^4 + \frac{283}{715} z^2 - \frac{256}{15015},$$

$$\zeta = 7 z^6 - \frac{105}{13} z^4 + \frac{315}{143} z^2 - \frac{35}{429},$$

$$\zeta' = z^7 - \frac{21}{13} z^5 + \frac{105}{143} z^3 - \frac{35}{429} z.$$

Posant

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$z = 0$$

et

$$\frac{Z}{\zeta} = \frac{256}{1225}.$$

Divisant par z, on a

$$\zeta' = z^6 - \frac{21}{13} z^4 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{429},$$

$\frac{\zeta}{\zeta'}$ donne pour quotient 7 et pour résidu

$$\frac{42}{13}\left(z^4 - \frac{10}{11} z^2 + \frac{5}{33}\right);$$

donc

$$z^4 - \frac{10}{11} z^2 + \frac{5}{11} = \frac{13}{42} \zeta - \frac{13}{6} \zeta',$$

ainsi

$$\zeta'' = z^4 - \frac{10}{11} x^2 + \frac{5}{33},$$

$$\lambda = \frac{13}{42}, \quad p = + \frac{13}{6}:$$

et, continuant de même, on trouve

$$\zeta''' = z^2 - \frac{3}{7}, \quad \lambda' = -\frac{4719}{280},$$

$$\zeta^{\text{IV}} = 1, \qquad \lambda'' = -\frac{147}{8},$$

$$p' = -\frac{4719}{280} z^2 + \frac{3333}{286},$$

$$p'' = -\frac{147}{8} z^2 + \frac{777}{88},$$

$$\eta = 1, \quad \eta' = 0, \quad \eta'' = \frac{13}{42}, \quad \eta''' = \frac{20449}{3920} z^2 - \frac{14443}{3920},$$

$$\eta^{\text{IV}} = \frac{61347}{640} z^4 - \frac{127413}{1120} z^2 + \frac{120263}{4486};$$

$$Z = z^6 - \frac{50}{39} z^4 + \frac{283}{715} z^2 - \frac{256}{15015}, \quad q' = 1,$$

$$Z' = \frac{1}{3} z^4 - \frac{22}{65} z^2 + \frac{323}{5005}, \qquad q'' = \frac{1}{3},$$

$$Z'' = -\frac{76}{2145} z^2 + \frac{632}{45045}, \qquad q''' = -\frac{76}{2145},$$

$$Z''' = -\frac{4}{3465}, \qquad q^{\text{IV}} = -\frac{4}{3405};$$

de là, on dérive la fonction entière equivalente à la fonction fractionnaire, savoir :

$$-\frac{1859}{16800} z^4 - \frac{1573}{29400} z^2 + \frac{7947}{39200}.$$

M. Koralek, le célèbre calculateur, a ainsi achevé le calcul; regardant z^2 comme l'inconnue, les trois racines de l'équation

$$z^6 - \frac{21}{13} z^4 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{459} = 0$$

sont

$$z_1^2 = 0,549\,664\,41,$$
$$z_2^2 = 0,900\,912\,54,$$
$$z_3^2 = 0,164\,807\,68;$$

ces valeurs, étant substituées dans l'expression

$$\frac{1859}{1680}z^4 - \frac{1573}{29400}z^2 + \frac{7947}{39200},$$

donnent respectivement ces résultats :

$$-\,0,042\,568\,17,$$
$$-\,0,011\,774\,11,$$
$$-\,0,008\,449\,63.$$

Note. On voit qu'il est bien moins pénible de calculer sur une fonction entière que sur une fraction rompue. Soient P, Q, R trois fonctions entières de z et supposons que l'on ait

$$Py + Q = 0, \quad R = 0;$$

éliminant z, on obtient une équation en y. Cette méthode nous apprend qu'on peut parvenir à cette équation en y en éliminant z entre $y = S$ et $R = 0$, S étant une fonction entière de z qu'on peut déterminer. Cela revient géométriquement à remplacer une courbe hyperbolique par une courbe parabolique. Tm.