

A. CHEVILLARD

**Géométrie descriptive. Lettre sur le
problème : trouver une droite qui rencontre
quatre droites données, précédée d'une
observation au rédacteur**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 306-312

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__306_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LETTRE SUR LE PROBLÈME :

Trouver une droite qui rencontre quatre droites données ,

PRÉCÉDÉE D'UNE OBSERVATION AU REDACTEUR ;

PAR M. A. CHEVILLARD,

Professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive

Monsieur le Rédacteur,

Vous avez raison de dire qu'Olivier n'a fait qu'introduire en géométrie descriptive une méthode employée depuis longtemps dans les épures de charpente. On a dit de même que Monge, en créant la géométrie descriptive, n'avait fait que généraliser des procédés connus bien avant lui des charpentiers et des tailleurs de pierre. Il s'agit donc seulement entre nous de savoir si l'innovation (*) d'Olivier est utile à la science du dessin. Vous, monsieur le rédacteur, vous dites à peu près non (**). Les praticiens, forts de leur expérience journalière, affirment le contraire. Pour que vos lecteurs puissent choisir entre ces deux opinions opposées, il est bon de leur rappeler que toutes les écoles industrielles ont adopté les idées d'Olivier (***) ; qu'en 1850, l'école théorique par excellence, c'est-à-dire l'Ecole Polytechnique, introduisait ces idées dans son programme. Aussi dès lors propose-t-on dans les concours annuels des questions dont la solution exige, le plus sou-

(*) Je nie l'innovation. Monge et Olivier ! quelle terrible comparaison !

Tm.

(**) J'ai dit, au contraire, que les changements de plans sont souvent très-utiles, même indispensables. Mais cette utilité ne date pas d'Olivier.

Tm.

(***) Qui inspectait ces écoles.

Tm.

vent, des changements de plan. Au lieu de laisser au choix du candidat les dimensions et la position de corps dont il doit construire l'intersection, on lui détermine par des nombres les éléments de la question.

Dira-t-on que les questions des premiers concours ont été données sous l'influence d'Olivier? (*) Je répondrai que l'École Polytechnique persiste aujourd'hui avec raison dans les mêmes errements (**); car elle a maintenu les changements de plan dans son programme et continué de proposer sur cette méthode des questions dont vous avez publié annuellement les énoncés en les accompagnant le plus souvent d'éloges. Je n'en citerai qu'un exemple remarquable tiré du concours de 1854 :

« Une calotte sphérique creuse repose par sa base sur
 » le plan horizontal; le rayon extérieur de cette base est
 » de $0^m,10$, le rayon intérieur est de $0^m,035$. La hauteur
 » de la calotte mesurée jusqu'à la surface extérieure est
 » de $0^m,03$. Par le centre de la base, on mène une droite
 » parallèle à la diagonale d'un cube dont une face serait
 » sur le plan horizontal et une autre sur le plan vertical;
 » puis on prend cette droite pour l'axe d'un cylindre dont
 » la section droite serait un cercle de $0^m,03$ de diamètre.
 » Cela posé, on veut connaître l'intersection de ce cylin-
 » dre avec les deux surfaces sphériques qui limitent la
 » calotte creuse, ainsi que la tangente en un point quel-
 » conque d'une de ces courbes. On construira, en outre,
 » le développement de la surface cylindrique du solide
 » commun aux deux corps. »

Enfin, si toutes ces raisons, qui font suite aux raisons théoriques insérées en mai dernier, étaient encore regardées comme insuffisantes, je pourrais placer la méthode

(*) Oui

(**) C'est une erreur.

des changements de plan sous la recommandation d'un nom dont vos lecteurs ne déclineront pas la compétence, je veux parler de M. Bardin, dont votre journal apprécie si bien le talent, et qui, sous le nom de *projections auxiliaires*, n'a cessé d'enseigner la même méthode (*).

En terminant, je crois devoir m'associer entièrement au regret que vous manifestez en ces termes dans le numéro de janvier 1855 : « On cherche avec raison à répandre et à populariser cette langue universelle qu'on appelle le *dessin*. Pourquoi cette langue est-elle exclue des concours universitaires? » Et je crois être conséquent en déclarant n'entendre aucunement l'observation que vous faites en mai 1856, à savoir qu'il faut employer avec économie, éviter même, autant que possible, les changements de plans (**); car les personnes qui connaissent la théorie de la transformation des projections savent bien à quelle grande classe générale de problèmes cette méthode doit s'appliquer, sans rien de vague ni d'indéterminé (mai, page 202), et qu'elle est, au contraire, destinée à produire l'économie en même temps que la visibilité des constructions graphiques.

1. Quand la solution d'un problème ne dépend pas de la position particulière de ses données, on évite la complication des théories et surtout l'emploi des courbes auxiliaires par la méthode d'Olivier. Il faudrait se procurer les mêmes avantages pour les problèmes dont la solution dépend principalement de la position des données. C'est pour ce cas, heureusement bien moins utile que l'autre, que le dessinateur est livré à ses ressources personnelles, faute de règles assez générales. Je citerai seu-

(*) Nous publierons incessamment les observations de M. Bardin, qui doit savoir mieux que personne ce qu'il enseigne. ТМ.

(**) Je ne vois aucune connexion entre ce regret que j'exprime encore aujourd'hui et les changements de plans de projection. ТМ.

lement l'ellipse à projections droite et circulaire (*), la sphère inscrite aux surfaces de révolution développables ou non, comme d'excellents moyens de simplification (*Géométrie descriptive* de M. Adhémar) aussi avantageux que peu répandus. Mais, pour résoudre la question qui fait l'objet de cette Note, je dois rappeler d'abord les problèmes suivants :

1°. *Déterminer le contact d'un plan quelconque passant par une génératrice rectiligne de surface gauche doublement réglée S, avec cette surface donnée soit par trois directrices droites, soit par deux directrices droites avec un plan directeur; problème résolu sans tracé de courbe à l'aide de la double génération rectiligne (Leroy, Olivier, etc.). Simplification remarquable si S est de révolution.*

Le même problème est résolu pour une surface gauche quelconque par l'emploi de l'hyperboloïde et mieux du parabolôïde de raccordement sur la génératrice donnée.

2°. *Circonscrire un cône de sommet m ou un cylindre de direction R à une surface gauche doublement réglée S. On sait que la ligne de contact est une conique dont le plan est polaire de m ou conjugué à R. On déterminera trois points de ce plan à l'aide de trois plans passant par trois génératrices rectilignes et par m ou parallèlement à R et dont on cherchera les contacts 1, 2, 3 (1°). On déterminera ensuite divers points de la conique de contact par les rencontres de diverses génératrices de S avec le plan 1, 2, 3. Ainsi, pas de courbe auxiliaire pour déterminer chaque point de la ligne de contact et, à la rigueur, même avantage pour une surface gauche quelconque, si l'on veut s'en préoccuper.*

(*) C'est-à-dire dont une projection est une droite et l'autre un cercle.

Jusqu'ici ces questions sont connues comme je l'indique, quoique dans un sens évidemment moins pratique; mais je ne sache pas qu'on en ait profité pour résoudre, *sans courbes à tracer*, les trois problèmes suivants :

2. *Mener par une droite D un plan tangent à une surface gauche doublement réglée S et déterminer les contacts x et y.*

Construisez le plan 1, 2, 3 de la conique de contact d'un cône circonscrit à S par un point m de D (n° 1, 2°). Les points x , y seront dans ce plan. Construisez le plan 6, 7, 8 de la conique de contact d'un cône circonscrit à S par un point n de D, plan qui contiendra encore x et y . Ces deux points seront donc à l'intersection E des plans 1, 2, 3, 6, 7, 8; D et E étant, comme on sait, deux droites polaires conjuguées, un troisième plan correspondant à un nouveau point de D ne servirait à rien. L'un des plans 1, 2, 3, 6, 7, 8 peut être fourni par un cylindre de direction D circonscrit à S.

Cela posé, reste à trouver les intersections x , y , de E avec S. Procurez-vous deux nouveaux points 4 et 5 de la conique 1, 2, 3 (n° 1). Par deux changements de plans de projection successifs, rabattez sur le papier les points 1, 2, 3, 4, 5 et la droite E. La question sera ramenée à trouver l'intersection d'une droite E avec une conique donnée par cinq points 1, 2, 3, 4, 5. Si l'on joint deux quelconques de ces cinq points aux trois autres, on formera deux faisceaux dont les rayons divisent homographiquement la sécante E en six points conjugués deux à deux. Les points doubles de cette division homographique sont précisément x et y . Il n'y a aucune difficulté à les obtenir, puisque ces six points sont en involution (*Géométrie supérieure* de M. Chasles). Si donc on trouve que ces points doubles sont imaginaires, on en conclura que

le problème est impossible, parce que D ne rencontre pas S . On sait d'ailleurs que la réciproque est vraie.

3. *Trouver les points où une droite D rencontre une surface doublement réglée S .*

Cherchez le contact x d'un seul plan tangent mené à S par D (n° 2). Les deux génératrices rectilignes qui passent par x et sont dans le plan $x D$ rencontreront D aux points cherchés. Le second plan tangent qu'on peut mener à S par D fournirait évidemment les deux points précédents, S étant du deuxième degré. Si x est sur D , celle-ci est tangente à S en ce point. Si x n'existe pas, D ne rencontre pas S .

Étant donnée une projection d'un point d'une surface doublement réglée, on pourra toujours trouver l'autre projection sans tracer de courbe; solution qui se simplifie considérablement dans bien des cas, surtout quand S a un plan directeur.

4. *Trouver une droite qui rencontre quatre droites quelconques données sans tracé de courbe (*)*.

Soient A, B, C, D les quatre droites données. On concevra l'hyperboloïde à une nappe S déterminé par A, B, C . On cherchera les points x, y où D rencontre cet hyperboloïde, et comme ces points auront été trouvés chacun par une génératrice de S (n° 3) savoir G et G' , ces deux droites rencontreront donc A, B, C, D ; d'où deux solutions.

L'hyperboloïde A, B, D fournirait encore deux solutions, etc.; en tout huit solutions se réduisant évidemment aux deux premières. Sans discuter ce problème, je ferai seulement remarquer que si la quatrième droite D était génératrice de l'hyperboloïde A, B, C et de même système

(*) M. Grunert a donné une solution analytique de ce problème (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 117)

que ces trois droites, il y aurait une infinité de solutions.

Les détails de l'exécution d'une pareille épure ne peuvent trouver place ici. Pour être compris, on devra partager le travail en plusieurs parties désignées chacune par une couleur particulière. L'habitude du dessin graphique suggérera de grandes simplifications, même dans le cas le plus général.
