V.-A. LEBESGUE

Remarques diverses sur les nombres premiers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 236-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__236_0>

REMARQUES DIVERSES SUR LES NOMBRES PREMIERS

(voir p. 130);

PAR M. V.-A. LEBESGUE (SUITE).

3. THÉORÈME. *Chacune des formules*

$$8x+1, \quad 8x+3, \quad 8x+5, \quad 8x+7,$$

où x *est un entier, renferme une infinité de nombres premiers.*

Cette proposition dépend des trois propositions suivantes faciles à établir :

1°. La formule x^2-2 n'a aucun diviseur premier de forme $8k+3$, $8k+5$.

2°. La formule x^2+2 n'a aucun diviseur premier de forme $8k+5$, $8k+3$.

La démonstration est toute semblable à celle du théorème II.

Soit, s'il est possible, $p=8k+3$ un diviseur de x^2-2 plus petit qu'aucun diviseur des formes $8k+3$, $8k+5$; comme on peut toujours supposer x impair et plus petit que p, x^2-2 sera impair et de forme $8m+7$.

Dans l'équation

$$x^2-2=p.y,$$

y sera de forme $8k+5$ et inférieur à p (*). Ainsi, d'après l'hypothèse, y ne saurait être premier. Si y est composé, on verra qu'un de ses facteurs est nécessairement de forme $8k+3$, $8k+5$; p ne serait donc pas un diviseur de x^2-2 plus petit qu'aucun diviseur des formes $8k+3$, $8k+5$.

On prouve de même la proposition relative aux diviseurs premiers de x^2+2.

3°. Les formules x^2-a, x^2-am^2 sont simultané-

(*) Car on a $py+2<p^2$.

ment divisibles ou non divisibles par p, nombre premier à m et à a.

Si $x^2 - a$ est divisible par p, $(mx)^2 - am^2$ l'est aussi. Si $x^2 - am^2$ est divisible par p, $(kx)^2 - a(mk)^2$ l'est aussi, et l'on posera

$$mk = ph \pm 1.$$

4°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k+1$.

$$x^4 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2x^2$$

n'a, d'après sa première forme, que des diviseurs $8k+1$ ou $8k+5$; d'après la seconde forme, il n'a pas de diviseurs $8k+5$. Le nombre x^4+1 n'a donc que des diviseurs premiers de forme $8k+1$. Si la suite finie de ces diviseurs était $p_1, p_2, \ldots, p_i$, en posant

$$x = p_1 p_2 \quad p_i,$$

on serait conduit à admettre que

$$(p_1 p_2 \ldots p_i)^4 + 1$$

est premier ou divisible par un des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_i$, ce qui est impossible.

5°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k+5$.

Démonstration de même espèce en partant de x^2+1 où l'on posera

$$x = 4y^4 + 2,$$

d'où

$$x^2 + 1 = 16y^4(y^4+1) + 5,$$

quantité non divisible par 5. On posera ensuite

$$y = p_1 p_2 \ldots p_i.$$

Les nombres p_i sont de forme $8k+5$, 5 excepté.

6°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme $8k+3$.

En partant de la formule

$$x^2 + 2 = 8k + 3$$

pour x impair, on prouvera de même que la série des nombres premiers $8k + 3$ est illimitée.

7°. De même, pour prouver que les nombres premiers de forme $8k + 7$ sont en nombre illimité, on partira de la formule

$$x^2 - 2 = 8k + 7$$

pour x impair.

4. Théorème. *Sur la factorielle des nombres premiers.*

Le produit

$$1.2.3\,4\ldots x = \Pi x$$

est ce qu'on nomme une *factorielle*.

Le produit

$$1.2.3.4.5.7.11\ldots p_x = \mathrm{P}x$$

est la factorielle des nombres premiers.

Par p_x, on indique le nombre premier qui approche le plus de x par défaut.

Le théorème suivant est dû à M. Tchebichef.

On a toujours

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} \Pi x = \mathrm{P}(x).\mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\right).\mathrm{P}\left(\frac{x}{3}\right)\cdots \\ \qquad \mathrm{P}(\sqrt{x}).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)\cdots \\ \qquad \mathrm{P}(\sqrt[3]{x}).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right)\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Si l'on convient de représenter par $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$ l'entier égal ou immédiatement inférieur à la quantité positive $\frac{x}{\theta}$, on voit tout de suite que si θ est un nombre premier inférieur à x, l'exposant de θ dans le produit

$$\mathrm{P}(x).\mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\right).\mathrm{P}\left(\frac{x}{3}\right)\cdots$$

sera $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$.

L'exposant de θ dans le produit

$$\mathrm{P}(\sqrt{x}).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\cdots$$

sera de même $e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)$.

Et ainsi de suite, de sorte que l'exposant de θ dans le second membre de l'équation (a) sera

$$e\left(\frac{x}{\theta}\right)+e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)+e\left(\frac{x}{\theta^3}\right)\cdots,$$

qui, comme ou le sait, est l'exposant de θ dans le produit $1.2.3\ldots x$.

Ce théorème a été introduit, je crois, dans l'*Arithmétique* de M. Bertrand, dont les traités élémentaires sont très-substantiels.